Analyse Complexe TD 1 (13/02 – 16/02)

Exercice 1 Déterminer le rayon de convergence de la série hypergéométrique

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} z^n $$

où α, β sont des complexes et $-\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Certains physiciens théoriciens font leur miel de ces fonctions.

Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Trouver toutes les identités entre $\partial f/\partial z$, $\partial \overline{f}/\partial z$, $\overline{\partial f/\partial z}$, $\partial f/\partial \overline{z}$, etc.
2. Vérifier que $\log_\theta$ est une fonction holomorphe.
3. Calculer $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \overline{z}$ en coordonnées polaires. Comment s'écrivent les conditions de Cauchy-Riemann ?
4. Si $Z = X + iY$ et $\overline{Z} = X - iY$, montrer que $\mathbb{C}[Z, \overline{Z}] = \mathbb{C}[X, Y]$. Quels sont les polynômes de $\mathbb{C}[X, Y]$ qui sont holomorphes sur $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$?
5. Plus généralement, on dit que $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est analytique réelle sur U si en tout point $z \in U$, il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset U$ et f est développable en série entière autour de z sous la forme :
$$ f(z + (x, y)) = \sum_{n,l \geq 0} a_{n,l} x^n y^l. $$
Montrer qu'un tel développement peut aussi s'écrire en puissances de z, $\overline{z}$. En déduire un critère pour savoir si une telle fonction est analytique *complexe*.

Exercice 3 Les questions sont encore indépendantes :

1. Soit α une 1-forme. Vérifiez que vous savez jongler entre les écritures de α et $d\alpha$ dans les bases cartésienne, polaire, et celle associée à la structure complexe dz, $d\overline{z}$.
2. Si ϕ est holomorphe sur un ouvert U, calculer $\phi^* dz$ et $\phi^* d\overline{z}$ sur U. Et si ϕ est seulement C^1 au sens réel ?
3. (Lemme de Poincaré). Soit α une 1-forme lisse fermée sur $D(0, 1)$. Montrer qu'il existe f une fonction lisse sur $D(0, 1)$ telle que $\alpha = df$.

Exercice 4

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Montrer que si l'image de f est contenue dans une droite, alors f est constante. Montrer que la même chose est vraie si l'image est contenue dans un cercle, ou plus généralement dans une courbe C^1.

Exercice 5

1. Retrouver le *lemme d'Abel* : si (u_n) est une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0, et (v_n) une suite de nombres complexes dont la suite des sommes partielles est bornée, alors $\sum u_n v_n$ converge.
2. *Continuité à la frontière.* Soit $f = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose que la série converge en $z_0 = e^{\imath\theta}$. Montrer que la fonction est continue dans tout secteur de la forme
$$ \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq \delta, |(\widehat{z_0 - z, z_0})| \leq \pi/2 - \eta\}. $$
et que la valeur de la fonction en z_0 est donnée par la valeur de la série en z_0.
3. Calculer $\sum \cos(n\theta)/n$, pour tous les θ possibles.

Exercice 6 *Lemme de la partie réelle.* Soit $f = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini. On note

$$ M_f(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)| \quad A_f(r) = \sup_{|z| \leq r} \mathrm{Re} f(z), \text{ attention, ce n'est pas } |\mathrm{Re} f|. $$

1. Vérifier que pour $n \geq 1$,
$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f)(re^{\imath\theta}) e^{-\imath n\theta} d\theta$$

2. * Supposons maintenant que $f(0) = 0$. En utilisant $\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f)(re^{\imath\theta}) d\theta = 0$, montrer que $|a_n| \leq 2A_f(R)/R^n$ pour $R > 0$. En déduire que pour $r \leq R$,
$$M_f(r) \leq \frac{2r}{R-r} A_f(R).$$

3. Sans hypothèse sur $f(0)$, montrer que pour $r \leq R$,
$$M_f(r) \leq \frac{R+r}{R-r}|f(0)| + \frac{2r}{R-r} A_f(R).$$

Exercice 7 *Inégalité isopérimétrique***. On considère, suivant la terminologie du cours, un compact K connexe, à bord C^1 connexe. En notant A son aire et L la longueur de son bord, montrer que
$$A \leq \frac{1}{4\pi} L^2.$$
À cet effet, considérer la 1-forme $(xdy - ydx)/2$. Pensez à utiliser les séries de Fourier. Quels sont les cas d'égalité ?

Exercice 8 *Théorème de Ostrowski Hadamard***. Soit $\lambda > 1$. On se donne une suite d'exposants (p_k) telle que $p_{k+1} > \lambda p_k$ pour tout k. On se donne aussi des coefficients a_k de sorte que la série
$$F(z) = \sum a_k z^{p_k}$$
aie pour rayon de convergence 1. Il s'agit de montrer que F ne peut s'étendre en une fonction holomorphe sur aucun ouvert strictement plus grand que le disque $D(0,1)$. On dit que le cercle unité est la *frontière naturelle* de F ; on dit aussi que F est une série lacunaire.

Indice : considérer l'image d'un voisinage du disque unité par la fonction $\psi(z) = 1/2(z^k + z^{k+1})$, pour k assez grand.

En considérant $\sum 2^{-n} z^{2^n}$, convainquez-vous que ceci n'implique pas que F ne soit pas continue sur $\overline{D}(0,1)$. Au passage, vérifiez que vous trouvez une fonction périodique, continue, nulle part dérivable (ceci est un exemple dû à Weierstrass).

La question de savoir comment généraliser cet énoncé le plus possible a agité les esprits de longues années au début du XXè siècle, avec Fabry (1896), Polya (1933) et Turan (1947) entre autres.