Analyse Complexe TD 10 (17/04 - 04/05)

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Calculer le laplacien en polaires.
2. Donner deux fonctions harmoniques différentes sur $\mathbb{C}$ qui s'annulent sur $\mathbb{R}$. Par contre, montrer que si u harmonique sur $\mathbb{C}$ s'annule sur un ouvert, alors elle est nulle.
3. Donner une formule simple pour le laplacien de $|f|^2$ quand f est holomorphe. En déduire que si les f_i sont holomorphes, $\sum |f_i|^2$ est constante si et seulement si tous les f_i sont constantes.
4. Que peut-on dire si u et $1/u$ sont harmoniques ?
5. Soient u et v deux fonctions harmoniques réelles sur un ouvert U connexe. Montrer que uv est harmonique si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée : u est constante, v est constante, il existe α réel tel que $\alpha u + \imath v$ est une fonction holomorphe.
6. Montrer que si u est harmonique réelle positive sur $\mathbb{C}$, alors u est constante.
7. Montrer que si $h : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ est harmonique, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $h - A \ln |z|$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur le disque privé de son centre.
8. À partir de la question précédente, montrer un théorème d'effacement des singularités pour les fonctions harmoniques.

Exercice 2 (Harnack)

1. Montrer que le noyau de Poisson sur le disque $P(z, w)$ vérifie les inégalités suivantes :
$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq P(z,w) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$
2. Soit (u_n) une suite de fonctions harmoniques sur un ouvert. Montrer que si $u_n \to u$ uniformément sur les compacts, alors u est harmonique.
3. Montrer que si $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ des fonctions harmoniques sur le disque, alors soit (u_n) converge uniformément sur les compacts vers u harmonique, soit $u_n(z) \to \infty$ pour tout z dans le disque.
4. Montrer l'équivalent du théorème de Montel pour les fonctions harmoniques : si (u_n) est une suite bornée de fonctions harmoniques sur un ouvert, alors il existe une suite extraite de (u_n) qui converge uniformément sur les compacts de cet ouvert.
5. ** Soit U un ouvert connexe, et K un compact de U. Alors pour tout $z_0 \in U$, il existe des constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $z \in K$, et toute u harmonique positive sur U,
$$\alpha u(z_0) \leq u(z) \leq \beta u(z_0).$$

Exercice 3

1. Soit L un opérateur différentiel d'ordre ≤ 2 sur $\mathbb{C}$, invariant par les isométries affines de $\mathbb{C}$ (i.e. il commute avec la composition par ces isométries). Montrer que L est une combinaison linéaire du laplacien et des constantes.
2. Plus généralement, montrer que si L est un opérateur différentiel sur $\mathbb{C}$ invariant par les isométries, montrer que L est un polynôme du laplacien.

3. ** Reprenez les questions 1 et 2 en remplaçant $\mathbb{C}$ par le disque $\mathbb{D}$ et les isométries affines par les automorphismes du disque. Par quoi faut-il remplacer le laplacien ?

Exercice 4

1. Étudiez la continuité au bord du disque de la fonction (dont vous montrerez qu'elle est harmonique) :
$$g(z) := \mathrm{Im}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right].$$
En particulier, déduisez-en qu'elle ne s'écrit pas avec un noyau de Poisson.
2. ** Si μ est une mesure borélienne sur le cercle, on définit $P(\mu)$ comme fonction sur le disque par
$$P(\mu)(z) := \int_{\mathbb{S}^1} P(z,w)\mathrm{d}\mu(w).$$
Montrer que $\mu \mapsto P(\mu)$ est une correspondance linéaire bijective entre les mesure boréliennes complexes sur le cercle et les fonctions harmoniques h sur le disque qui vérifient
$$\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{\imath\theta})|\mathrm{d}\theta < \infty.$$
Pour montrer l'injectivité, pensez à la solution du problème de Dirichlet et intégrez μ contre des fonctions continues.

Exercice 5 Redémontrez le résultat de l'exercice 2 du TD 9 en utilisant le fait que $\log|\varphi|$ est une fonction harmonique.