Analyse Complexe TD 10 (17/04 - 04/05)

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Il y a plusieurs façon de faire, diversement efficaces.
a) Si vous en avez vraiment besoin, c'est une formule trouvable sur wikipedia.
b) Sinon, vous pouvez calculer le changement de coordonnées depuis les cartésiennes. Voir TD1
c) Vous pouvez aussi calculer à partir de $\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}$, ce qui est peut-être un peu plus rapide. Voir aussi TD1.
d) Mais on peut aussi utiliser la chose suivante. Soit φ une fonction holomorphe. Alors $\Delta(f\circ\varphi) = |\varphi'|^2(\Delta f)\circ\varphi$. On peut appliquer cette formule avec $\varphi = \log$. On trouve
$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\left\{(r\partial_r)^2 + \partial_\theta^2\right\}. \tag{1}$$
2. On peut choisir 0, y, xy, par exemple ; par contre une fonction harmonique sur un ouvert connexe qui s'annule sur un sous-ouvert non vide est identiquement nulle. Cela provient de l'écriture sur des disques comme la partie réelle d'une fonction holomorphe.
3. On trouve à partir de la formule $\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}$ que $\Delta|f|^2 = 4|f'|^2$. On peut aussi utiliser la formule pour le laplacien d'une fonction composée avec une fonction holomorphe. Si $\sum|f_i|^2$ est constante, on trouve que son laplacien est nul. Et donc les f_i' sont tous nuls aussi.
4. On calcule $0 = \Delta 1/u = 8\partial_z u\partial_{\bar{z}} u u^{-3}$. Étant donné que $\partial_z u$ est holomorphe et $\partial_{\bar{z}} u$ est antiholomorphe, on en déduit que u est holomorphe ou antiholomorphe.
5. On suppose que ni u ni v ne sont constantes. Alors ∇u et ∇v sont orthogonaux. Autrement dit, vu que u et v sont réelles, $\partial_z u/\partial_z v \in i\mathbb{R}$. Mais c'est une fonction méromorphe. Elle est donc constante.
6. On peut écrire $u = \mathrm{Re} f$. On trouve donc que f est de partie réelle positive sur $\mathbb{C}$. Cela implique que f est constante.
7. On peut écrire le développement de Laurent de $\partial_z h = a/z + \sum_{i\neq 1} a_i/z^i$. La deuxième partie de la somme a une primitive holomorphe sur le disque privé d'un point. Pour la partie a/z, on peut l'identifier comme $2\partial_z a\log|z|$. On applique alors l'argument du cours.
8. On se donne une fonction harmonique h bornée sur un disque épointé. On veut montrer que h peut se prolonger par continuité au disque entier. On peut écrire $h = A\log|z| + \mathrm{Re} f$. On trouve que $\mathrm{Re} f$ diverge de façon au plus logarithmique. On voudrait montrer que f se prolonge continûment en zéro, ce qui permet de conclure.
Mais $f(z) = \sum a_n z^n$, et $1/\pi\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathrm{Re} f(re^{i\theta})d\theta = a_n r^n + \overline{a_{-n}} r^{-n}$. On en déduit que pour $n \geq 1$, $a_{-n} = 0$. cqfd.

Exercice 2 (Harnack)

1. On rappelle que $P(z,w) = (1-|z|^2)/|z-w|^2$. Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire.
2. La formule de représentation avec le noyau de Poisson montre que si (u_n) converge uniformément sur les compacts, alors elle converge aussi en norme C^k sur les compacts. En particulier la limite est harmonique.
3. Étant donné que u_n est une suite croissante de fonction, elle a une limite dans les fonctions à valeur dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Par ailleurs, d'après l'inégalité sur le noyau de

Poisson, on trouve que pour toute fonction harmonique positive sur le disque h, et tout z, z' dans le disque,

$$h(z) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}\frac{1+|z'|}{1-|z'|}u(z'). \tag{2}$$

En particulier, $(u_n(z))$ converge si et seulement si $(u_n(z'))$ converge, ce qui explique la dichotomie. De plus, si u n'est pas la fonction $+\infty$, elle est localement bornée, et u satisfait la formule de la moyenne dans le disque (par passage à la limite). Elle est donc harmonique.

4. D'après la formule de représentation de Poisson, sur tout disque relativement compact dans l'ouvert U, la suite (u_n) est équibornée, et équicontinue. On peut donc appliquer Arzela-Ascoli, pour montrer que (u_n) admet une sous suite qui converge uniformément sur ce disque. On peut réaliser ceci pour un recouvrement dénombrable par des disques de l'ouvert, puis procéder à une extraction diagonale.
5. ** On se donne deux points z et z' dans U. On a un chemin γ entre z et z'. On peut recouvrir ce chemin un nombre fini de disques $D_1, \ldots, D_n$ ouverts inclus dans U. On trouve une suite de points $z_0 = z, z_1, \ldots, z_{n-1} = z'$ tels que $z_k \in D_k \cap D_{k+1}$, avec $D_0 = D_1$. Alors il existe des constantes $K_1, \ldots, K_{n-1}$ telles que pour toute u harmonique positive sur U, $u(z_k)/K_k \leq u(z_{k+1}) \leq K_k u(z_k)$. Ceci permet de conclure, étant donné que les constantes K_i dépendent continûment du choix de $z_0, \ldots, z_{n-1}$.

Exercice 3

1. Dans le cas d'un opérateur d'ordre ≤ 2, on peut faire des calculs explicites. La partie homogène d'ordre 1 de L doit être la dérivation suivant un vecteur constant. Pour que ceci soit invariant par rotation, il faudrait que ce vecteur soit invariant par rotation, autrement dit nul. Il n'y a donc qu'une partie homogène d'ordre 2 et une constante. La partie homogène d'ordre 2 s'écrit $a\partial_x^2 + b\partial_x\partial_y + c\partial_y^2$. On se donne une fonction f qui ne dépend que de x, et R la rotation d'angle $\pi/2$. Alors $L(f \circ R) \circ R^{-1} = Lf$ donne $a = c$. Maintenant, il reste à montrer que $b = 0$. Mais $b\partial_x\partial_y$ doit être un opérateur invariant car L est invariant, et $a\Delta$ aussi.
   Soit R' la rotation d'angle $\pi/4$. $R'(x,y) = (x-y, x+y)/\sqrt{2}$. Donc $\partial_x\partial_y(f \circ R') = [(\partial_y^2 - \partial_x^2)f/2] \circ R'$. Ceci implique que $b = 0$.
2. On commence par constater que L est un opérateur à coefficients constants, vu qu'il est invariant par translation. On trouve aussi que chaque opérateur différentiel à coefficient constant qui apparait dans sa décomposition en opérateurs homogènes est lui aussi invariant par les isométries de $\mathbb{C}$. On se retrouve donc à considérer les opérateurs différentiels homogènes à coefficients constants. On peut décomposer ces opérateurs sur la base $\partial_z^n\partial_{\overline{z}}^m$. Si on conjugue cet opérateur par $z \mapsto e^{i\theta}z$, on trouve $e^{i(n-m)\theta}\partial_z^n\partial_{\overline{z}}^m$. Autrement dit, cette base diagonalise l'opérateur de conjugaison par les rotations. Et les seuls opérateurs invariants sont ceux dans l'espace engendré par les $(\partial_z\partial_{\overline{z}})^n$. C'est à dire exactement les polynômes du Laplacien.
3. ** En utilisant l'invariance par rotation en zéro, on trouve qu'en zéro, l'opérateur est de la forme $L = \sum a_n(\partial_z\partial_{\overline{z}})^n$.
   Ensuite, pour $z_0 \in \mathbb{D}$, on se donne $\phi(z) = (z+z_0)/(1+\overline{z_0}z)$ qui envoit 0 sur z_0. On cherche à utiliser $(L(f \circ \phi))(0) = (Lf)(\phi(0))$. Cela donne $Lf(z_0) = \sum a_n(|\phi^{-1'}|^{-2}\partial_z\partial_{\overline{z}})^n f(z_0)$. En particulier, L est déterminé par les a_n.
   De plus, on peut construire un opérateur d'ordre 2 qui est invariant par les automorphismes. C'est $\widetilde{\Delta} = (1-r^2)^2\Delta$. Étant donné que les opérateurs invariants sont déterminés par les coefficients en zéro, ils sont tous des polynômes en $\widetilde{\Delta}$.

Exercice 4

1. C'est la partie imaginaire d'une fonction holomorphe, donc elle est harmonique. Elle est continue en tout point du bord qui n'est pas 1, et elle est nulle pour tout point du bord qui n'est pas 1. Par contre quand $z \to 1$ avec $z = 1+\epsilon e^{i\theta}$, on trouve que $g(z) \sim -4\sin 2\theta/\epsilon^2$. la fonction n'est donc ni bornée, ni continue au bord. Si elle s'écrivait comme l'intégrale d'une fonction continue sur le cercle contre le noyau de Poisson, elle serait continue au bord.
2. ** On se donne μ une mesure borélienne complexe, et on commence par montrer que $P(\mu)$ satisfait la propriété annoncée. On peut toujours supposer que μ est une mesure réelle positive finie. On observe

$$\int |P(\mu)(re^{i\theta})|d\theta = \int (1-r^2)\frac{1}{|re^{i\theta}-e^{i\psi}|^2}d\theta d\mu(\psi). \tag{3}$$

   Mais μ est finie et $\int d\theta/|re^{i\theta}-1|^2 \sim C/(r-1)$ quand $r \to 1$, donc le membre de droite est borné quand $r \to 1$.
   Réciproquement, si on a une fonction harmonique h qui satisfait la condition, on peut observer que la suite des mesures obtenues en restreignant h au cercles centrés en zéro de rayon r, avec $r \to 1$ est bornée. On peut donc en extraire une sous suite qui converge vers une mesure μ. En utilisant la formule de Poisson sur des disques de rayon $1-\epsilon$, on constate alors que $h = P(\mu)$.
   Il reste à montrer que P est injective. Autrement, si $\mu \neq 0$, $P(\mu) \neq 0$. Si f est une fonction continue sur le cercle, on considère $A : r \mapsto \int P(\mu)(re^{i\theta})f(\theta)d\theta$. Si on note $\mu_f = f(\theta)d\theta$, on trouve que $A(r) = \int P(\mu_f)(re^{i\theta})d\mu(\theta)$. Si $P(\mu) = 0$, on en déduit que pour toute f continue sur le cercle, $\int f d\mu = 0$. Autrement dit $\mu = 0$.

Exercice 5 Si φ est un biholomorphisme entre deux couronnes, $\log|\varphi|$ est une fonction harmonique. On montre comme dans le TD précédent que c'est une fonction continue sur la couronne fermée. On trouve donc que pour un certain λ réel et une certaine constante C, $\log C|\varphi||z|^{-\lambda}$ est une fonction harmonique sur la couronne fermée, qui s'annule au bord. D'après le principe du maximum elle doit être nulle sur toute la couronne. On peut alors conclure comme dans le TD 9.