Analyse Complexe TD 11 (8/05 - 11/05)

On fixe un réseau Λ, et les fonctions elliptiques sont entendues elliptiques de périodes Λ. La fonction de Weierstrass associée est $\wp$.

Exercice 1

1. Tous les résidus de $\wp$ sont nuls.
2. Si on suppose qu'on a trouvé une telle primitive σ, on constate que les zéros de σ sont simples, et situés au points du réseau. Si $\tilde{\sigma}$ est une fonction qui s'annule exactement au points du réseau, la différence entre la dérivée logarithmique de $\tilde{\sigma}$ et ζ_W est une fonction entière. On peut diviser $\tilde{\sigma}$ par l'exponentielle de sa primitive pour obtenir un bon condidat pour σ. En fait, en utilisant le théorème de factorisation pour les fonctions d'ordre fini du partiel de l'année dernière, on aurait pu directement factoriser σ comme un produit de Weierstrass ; voir `http://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_functions`.

Exercice 2

1. Soit f une fonction elliptique paire. On considère les $z_1, \dots, z_n$ les zéros de f comptés avec multiplicité et $w_1, \dots, w_n$ les pôles. Comme f est paire, il suffit de ne compter qu'un zéro sur deux ; si z est un zéro, on compte soit z soit $-z$. On pose alors $a_i = \wp(z_i)$ et $b_i = \wp(w_i)$. La fonction obtenue en divisant f par la fraction rationnelle en $\wp$ est encore elliptique, mais n'a plus ni de zéros, ni de pôles. Elle est donc constante.
2. On peut décomposer f en sa partie paire, et sa partie impaire. Il suffit donc de montrer que les fonctions impaires peuvent s'écrire comme $\wp' Q(\wp)$ où Q est une fraction rationnelle. Mais si f est impaire, $f/\wp'$ est encore elliptique, et paire.

Exercice 3

1. Ceci est une fonction elliptique en z et en y. Notons la $F(z, y)$. On a $F(y, z) = -F(y, z)$. De plus, on trouve que $F(-z-y, y) = -F(z, y)$. On va donc considérer y comme une variable fixe. On peut toujours supposer que $y \neq 0$ pour le moment.
   On va montrer que F est constante en z, et donc constante tout court. Si F n'est pas constante en z, elle doit avoir des pôles. Dans la variable z, les seuls pôles possibles sont 0 et $-y$ (modulo Λ). Supposons qu'on ait montré qu'il n'y a pas de pôle en zéro. Alors comme $F(u-y, y) = -F(-u, y)$, il n'y a pas de pôle non plus en $-y$, et F est constante.
   On considère donc le comportement de F pour z près de zéro. Comme on cherche les pôles de F, on peut ne garder que la partie singulière de $\wp$ en 0. On cherche donc à estimer
   $$\begin{vmatrix} z^{-2} & -2z^{-3} & 1 \\ \wp(y) & \wp'(y) & 1 \\ \wp(z+y) & -\wp'(z+y) & 1 \end{vmatrix} = 2\frac{\wp(y) - \wp(z+y)}{z^3} + \frac{\wp'(y) + \wp'(z+y)}{z^2} - \wp(y)\wp'(z+y) - \wp(z+y)\wp'(y).$$
   On utilise alors un DL à l'ordre 3. $\wp(y) = \wp(z+y) - z\wp'(z+y) + z^2/2\wp''(z+y) + O(z^3)$ et $\wp(z+y) = \wp(y) + z\wp'(y) + z^2/2\wp''(y) + O(z^3)$. De plus, quand $z \to 0$, $\wp''(z+y) \to \wp''(y)$. On trouve donc que $F = O(1)$ quand $z \to 0$ avec $y \neq 0$.
   Ainsi, $F(z, y) = G(y)$ avec G elliptique. Mais alors $F(z, y) = G(y) = -F(y, z) = G(z)$ ne dépend ni de y ni de z.
   Il reste à déterminer la constante. On prend $z = w_1$, $y = w_2$ pour trouver que $F = 0$.
2. D'après la question précédente, il y a deux nombres complexes α, β tels que $\wp(z+y) = \alpha\wp(z) + \beta\wp(y)$, $\wp'(z+y) = -\alpha\wp'(z) - \beta\wp(y)$ et $1 = \alpha + \beta$. Autrement dit, le symétrique de $F(z, y)$ par rapport au premier axe (c'est à dire $F(-z, -y)$) est sur la droite complexe qui relie $F(z)$ et $F(y)$.

Réciproquement, il faut montrer qu'une droite complexe de $\mathbb{C}^2$ coupe la courbe de degré 3, au plus 3 fois. La restriction du polynôme dont la courbe est le lieu des zéros, à cette droite, est un polynôme de degré au plus 3. Il suffit donc de vérifier qu'aucune droite complexe affine n'est incluse dans la courbe.
Si une droite affine était incluse dans la courbe, cela voudrait dire que pour des constantes α et β complexes, $\alpha(\wp(z) - \wp(z_0)) + \beta(\wp'(z) - \wp'(z_0)) = 0$. Soit $\wp$ est constante, soit $\wp' = C\wp + D$. Mais les deux cas sont incompatibles avec la définition de $\wp$ (pôle d'ordre 2 en zéro...).

Exercice 4 On se donne une courbe $\gamma : I =]0,1[\to \mathbb{C}$, dont on suppose qu'elle est analytique réelle (développable en série entière autour de chaque point dans un voisinage assez petit) ; on demande aussi que γ' ne s'annule pas.

1. Il suffit de la paramétrer ! Un paramétrage analytique réel donne un biholomorphisme local dès que γ' ne s'annule pas.
2. Il s'agit de $z \mapsto \gamma(\overline{\gamma^{-1}(z)})$. Ceci donne une définition locale. De plus, si on a une application antiholomorphe autour de zéro, qui est l'identité sur $\mathbb{R}$, c'est nécessairement la conjugaison $z \mapsto \overline{z}$. Ceci implique que si on a défini deux involutions anti-holomorphe qui préservent la même courbe, alors elles coincident.
   Comme la courbe est fermée simple, on peut trouver une paramétrisation $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = a$. Comme les involutions définies autour de a grâce à $\tilde{\gamma}(t)$, t proche de 0, et $\tilde{\gamma}(t)$, t proche de 1 coincident, on peut directement définir l'involution avec $\tilde{\gamma}$.
3. On veut prolonger f par $f(\sigma z) = \overline{f(z)}$. Il suffit alors de vérifier que ceci donne une fonction holomorphe de la courbe. On considère donc un point $\gamma(t)$ de la courbe. la fonction γ définit un biholomorphisme entre un voisinage complexe de t et un voisinage complexe de $\gamma(t)$. On considère $f \circ \gamma$. Elle satisfait les hypothèse du lemme de Schwarz !
4. On peut considérer U un voisinage du bord de Ω sur lequel est définie l'involution associée. Si $z \in \partial\Omega$, on peut définir un logarithme $\log F$ de ψ dans un voisinage V_+ de z dans Ω. On peut supposer que $V_+ \subset U$. Dans ces conditions, $i \log F$ satisfait exactement les conditions de la réflexion de Schwarz de la question précédente. On peut donc le prolonger, puis en prendre l'exponentielle pour obtenir un prolongement de F à V_+. Ainsi, ψ a un prolongement holomorphe autour de chaque point du bord de Ω.
5. *
   On voudrait remplacer f par $\eta^{-1}(f)$, mais η n'est pas forcément injective. Plutôt que d'essayer de construire une paramétrisation injective, on peut considérer σ' l'involution associée à η. On définit $g = f - \sigma' \circ f$ sur U_+, prolongée à U_- par $\sigma' \circ f \circ \sigma - f \circ \sigma$. La fonction g est harmonique sur U privée de l'image de γ. De plus, elle tend vers 0 en γ. Comme à la question 3, on peut en déduire qu'elle est harmonique sur U tout entier. Mais $\partial_z g = f'$, ce qui montre que le prolongement naturel de f est bien holomorphe sur U.