Analyse Complexe TD 12 (15/05 – 18/05)

Exercice 1 Trouver l'ordre exact d'annulation de J' aux points i et $-j^2$.

Exercice 2 Fixons $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$. On dit d'une fonction ϑ entière sur $\mathbb{C}$ que c'est une fonction thêta, si $(\vartheta'/\vartheta)'$ est elliptique pour Λ_τ.

1. Toutes les fonctions de la forme $\exp(az^2+bz+c)$ sont des fonctions thêta. On les appelle « fonctions thêta triviales ». Montrer que ce sont exactement les fonctions thêta qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{C}$.
2. Si ϑ est une fonction thêta, montrer qu'il existe des complexes $(a_w, b_w)_{w\in\Lambda_\tau}$ de sorte que pour $w \in \Lambda_\tau$
$$\vartheta(z+w) = e^{2\imath\pi(a_w z + b_w)}\vartheta(z).$$
La famille $(a_w, b_w)_w$ est le « type de ϑ ». Montrer réciproquement qu'il suffit qu'une fonction vérifie une telle famille d'égalités pour être une fonction thêta.
3. Montrer que comme pour les fonctions elliptiques, on peut définir un diviseur pour les fonctions θ, comme un élément de $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$. Calculez-le à partir des a_ω, b_ω, en choisissant une maille élémentaire du réseau.
4. Pour tout a, b réels, posons
$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(\tau(m+a)^2+2(m+a)(z+b))}.$$
Vérifiez que ceci définit bien une fonction thêta, dite « thêta de Riemann ». Calculer son diviseur.
5. Si σ est la fonction définie au TD 11, exercice 1, calculer son diviseur.
6. * Montrer que le quotient de deux fonctions thêta du même type est une fonction elliptique. Réciproquement, montrer que les fonctions elliptiques sont toutes obtenues de cette façon. Vous pourrez commencer par trouver une fonction thêta avec pour zéros les pôles de f, avec f elliptique.

Exercice 3 Le pendule

1. Rappelez-vous pourquoi (et dans quels coordonnées) l'équation du pendule simple est de la forme
$$\dot{\theta}^2 - \cos\theta = E - 1, \quad E \geq 0.$$
2. Retrouvez que
$$\int^\theta \frac{\mathrm{d}s}{F(E, \cos s)} = t + Cste.$$
3. Déduisez-en une relation de la forme
$$\int^{\cos\theta} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{au^3+bu^2+cu+d}} = t + Cste.$$
4. Déduisez-en que vous pouvez écrire $\cos\theta$ avec une fonction $\wp$ associée à un bon réseau (qui est implicite), et une constante d'intégration.
5. * Étant donné que vous savez où $\wp'$ s'annule, vous pouvez identifier la constante d'intégration. À partir de là, trouvez un argument pour montrer que le réseau est rectangulaire.

Exercice 4 Dans cet exercice, on considère Γ le noyau de la réduction modulo 2 des éléments de $PSL_2(\mathbb{Z})$, c'est à dire du morphisme $PSL_2(\mathbb{Z}) \to PSL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

1. * On considère la Q région du demi-plan définie par :
$$\mathrm{Im} z > 0, \quad -1 \leq \mathrm{Re} z < 1, \quad |2z+1| \geq 1, \quad |2z-1| > 1.$$
Montrez que c'est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur le demi-plan.
2. On considère Q_0 la moitié de droite de Q. Construisez un biholomorphisme h de $\mathring{Q}_0$ dans $\mathbb{H}$, qui se prolonge à $\overline{Q_0}$, avec $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h(\infty) = \infty$.
3. Montrer que h peut s'étendre une fonction holomorphe sur $\mathring{Q}$, continue sur $\overline{Q}$ et injective sur Q.
4. Montrer que h s'étend enfin en une fonction λ invariante par Γ, qui admet l'axe réel comme frontière naturelle. De plus, montrer que l'image de λ est $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Exercice 5 * Montrer le développement :
$$G_k(\tau) = 2\zeta(2k) \left[1 - \frac{4k}{b_{2k}} \sum_1^\infty \sigma_{2k-1}(n) q^n \right],$$
où $\sigma_l(n) = \sum_{d|n} d^l$.

Exercice 6 retour sur les fonctions ϑ.

1. Identifiez la fonction
$$\Theta(x,t) = \sum_{n \in Z} e^{\imath n x} e^{-n^2 t}$$
parmi les fonctions thêta de Riemann de l'exercice 2. Vérifiez que si on la restreint à $\{t > 0, x \in \mathbb{R}\}$:
$$[\partial_t - \partial_{xx}]\Theta = 0.$$
2. Déduisez-en une formule de représentation des solution à l'équation de la chaleur sur le cercle (dans un espace raisonnable).