Analyse Complexe TD 13 (22/05)

Exercice 1

1. Vérifiez que $z \mapsto z^2$ est un revêtement de $\mathbb{C}^*$ par lui même.
2. Plus généralement, si P est un polynôme non constant, montrer que P est un revêtement de $B = \mathbb{C} \setminus P(\{z | P'(z) = 0\})$ par $P^{-1}(B)$.
3. Généralisons encore : soit $f : U \to V$ une fonction holomorphe entre deux ouverts connexes. Montrer que si f' ne s'annule pas, et si f est propre, f est un revêtement à feuilles finies.

Exercice 2 Les questions sont indépendantes

1. Si P est un polynôme non nul, montrer que l'équation $e^z = P(z)$ a une infinité de solutions.
2. Si g est une fonction qui ne s'annule pas, et qui n'est pas égale à un e^{z+k}, montrer que l'équation $e^z = g(z)$ a une infinité de solutions.
3. Donner une autre démonstration (sans revêtements) du petit théorème de Picard pour les fonctions entières d'ordre fini.
4. Montrer que si f est entière non constante, soit elle est surjective, soit elle évite un (et un seul) nombre complexe, et elle atteint les tous les autres une infinité de fois. N'utilisez que le petit th. de Picard.

Exercice 3 Redémontrer le petit théorème de Picard à l'aide de l'exercice 4 du TD 12. (Utiliser la fonction λ plutôt que la fonction J).

Exercice 4 Reprenez l'exercice 2 du partiel de cette année en supposant que U évite deux points de $\mathbb{C}$ (plutôt que U est borné). Montrer que tous les résultats fonctionnent encore !

Exercice 5 Classifiez toutes les fonctions modulaires qui sont méromorphes en la variable $q = e^{2\imath\pi\tau}$, en terme de J et des G_k.

Exercice 6 On suppose tous les espaces connexes et localement connexes par arcs.

1. Si G est un groupe qui agit librement sur un ensemble X, et H un sous-groupe de G, montrer que le normalisateur de H dans G agit sur le quotient X/H. Montrer que c'est le plus grand sous-groupe de G avec une action sur le quotient qui est compatible avec l'action de G sur X.
2. Montrer le théorème du cours (un revêtement $X/H \to X/G$ est galoisien si et seulement si H est normal dans G).
3. Si deux points x, y sont dans la même fibre d'un revêtement $p : X \to B$, montrer que $p_*\pi_1(X, y)$ et $p_*\pi_1(X, x)$ sont conjugués par un élément de $\pi_1(B, p(x))$. Montrer aussi la réciproque : les conjugués de $p_*\pi_1(X, x)$ sont les $p_*\pi_1(X, z)$ avec z dans la fibre de $p(x)$. Réciproquement, il suffit de relever la conjugaison.
4. Donner une autre démonstration du théorème du cours.

LES EXERCICES AUXQUELS VOUS AVEZ ÉCHAPPÉ.

Exercice 7 On veut calculer les groupes d'automorphismes de revêtement associés aux polynomes.

1. Si p est un revêtement holomorphe entre 2 ouverts de $\mathbb{C}$, montrer que les automorphismes de revêtement sont des biholomorphismes.
2. On suppose que p est un polynôme. On considère les ouverts introduits dans l'exo 1.2. On se donne f un automorphisme de ce revêtement. Commencez par montrer qu'il est propre de $P^{-1}(B)$ dans lui-même.
3. En observant que p est propre (sur $\mathbb{C}$!), montrer que f se prolonge en une fonction entière.
4. Déduisez-en que f est un polynôme, puis qu'il est d'ordre 1.
5. Quels sont les polynômes qui donnent un revêtement galoisien ?
6. * Décrivez les polynômes p tels que $Aut(p)$ n'est pas trivial.

Exercice 8

1. Soit $p : X \to B$ un revêtement avec X connexe par arcs. Soit b un point de la base, de fibre F_b. En utilisant le théorème du relèvement, montrer qu'il y un morphisme (appellé « monodromie ») entre $\pi_1(B, x)$ et le groupe σ_b des permutations de F_b.
2. Vérifiez que puisque X est connexe par arcs, les automorphismes de revêtement de p agissent simplement sur les fibres.
3. Vérifiez que $Aut(p)$ commute avec la monodromie.
4. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de 0. Supposons que f a un zéro d'ordre $k \geq 1$ en 0. Vous savez qu'il existe un voisinage V de zéro suffisamment petit de sorte que f soit un revêtement de $V \setminus \{0\}$ sur $f(V) \setminus \{0\}$. Identifiez la monodromie dans cet exemple précis.
5. ** Vous pouvez retrouver le résultat de la question 5 de l'exercice précédent en utilisant la monodromie. Pensez-à interpréter la monodromie d'un grand lacet qui fait le tour des racines de p comme une sorte de monodromie autour du point à l'infini.

Exercice 9 Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On se donne Γ un groupe discret d'automorphismes de U (i.e un groupe de biholomorphisme). On suppose que Γ agit proprement. Le but de l'exercice est de montrer que le quotient U/Γ s'identifie localement à des ouverts de $\mathbb{C}$.

1. On commence par considérer un point $z_0 \in U$ tel que son stabilisateur $\Gamma(z_0) := \mathrm{Stab}(\Gamma, z_0)$ est trivial (i.e, $\forall \gamma \in \Gamma$, $\gamma z_0 = z_0$ implique que γ est le neutre). Construire un voisinage V de l'orbite de z_0, invariant par Γ, et une fonction f holomorphe sur V, qui est invariante par Γ, et qui est injective sur V/Γ.
2. Si le stabilisateur de z_0 n'est pas trivial, vérifiez qu'il est quand même fini. On peut donc définir
$$\Psi_{z_0} : z \mapsto \frac{1}{\mathrm{card}(\Gamma(z_0))} \sum_{\gamma \in \Gamma(z_0)} \gamma(z)\gamma'(0)^{-1}$$
Vérifier que ceci est invariant par $\Gamma(z_0)$, et injectif sur $U/\Gamma(z_0)$. Conclure
3. Quelle condition faut-il vérifier pour que la projection $U \to U/\Gamma$ soit un revêtement ? Quand cette condition n'est pas vérifiée, peut-elle l'être quitte à enlever des points ?
4. Que ceci devient-il dans le cas du demi-plan de Poincaré quotienté par $PSL_2(\mathbb{Z})$?

Exercice 10 Si Λ est un réseau dans $\mathbb{R}^n$, on peut le représenter par une matrice en choisissant des générateurs $(e_1, \dots, e_n)$. On dit Λ est unimodulaire si le déterminant de cette matrice est 1. Si de plus la matrice de Gram $A = (e_i.e_j)$ est à coefficients entiers, on sait que le dual de Λ s'identifie à Λ grâce au produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\|\lambda\|^2 \in 2\mathbb{Z}$, alors A est à coefficients entiers. On dit que Λ est pair.
2. Si tel est le cas, on pose
$$\vartheta_\Lambda(\tau) = \sum_\Lambda e^{\imath\pi\|\lambda\|^2\tau}.$$
En utilisant une formule sommatoire de Poisson dans $\mathbb{R}^n$, montrer que ϑ_Λ est une fonction modulaire de poids $n/2$.
3. Si f est une fonction modulaire de poids k, et si on note $v_z(f)$ l'ordre de son zéro en z (avec $v_\infty(f)$ l'ordre d'annulation en q), montrer que
$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_\rho(f) + \sum_{P\setminus\{i,\rho\}} v_z(f) = \frac{k}{6}.$$
4. Déduisez-en qu'il n'y a qu'une seule forme modulaire de poids 8, à constante près.
5. Si 8 divise n, considérer L_n le réseau engendré par les vecteurs $v \in R^n$ tels que $2v$ soit de coordonnées entières, toutes paires ou toutes impaires. On suppose de plus que la somme des coordonnées de v est un entier pair. Montrer que L_n est bien un réseau, et qu'il vérifie les hypothèses précédentes.
6. Conclure que $\mathbb{R}^{16}/L_8 \times L_8$ et $\mathbb{R}^{16}/L_{16}$ sont deux tores qui ont le même spectre du laplacien, mais qui ne sont pas isométriques. C'est un théorème de Milnor !