Analyse Complexe TD 1 (13/02 – 16/02)

Exercice 1 1 si α et β ne sont pas des entiers négatifs, ∞ sinon.

Exercice 2

1. Il n'y a pas de surprise
$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$$
une bonne façon de faire est de d'utiliser la définition de $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \overline{z}$ comme base duale de dz et $d\overline{z}$.
2. Il y a plusieurs façon de voir la chose. Par l'inversion locale sur $\mathbb{R}^2$, on sait que exp est un difféo local, et donc $\log_\theta$ est toujours C^∞ sur son domaine de définition et on connait sa différentielle. On constate alors que c'est une similitude directe. Une autre façon est de calculer le $\partial/\partial \overline{z}$ en coordonnées polaires (cf question suivante) et constater que ça s'annule.
3. Le plus efficace (et économe en erreur de calcul) est d'écrire dz en fonction des dr et $rd\theta$, puis encore utiliser le fait que $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \overline{z}$ est la base duale de dz, $d\overline{z}$. On doit trouver
$$2e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} - i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$
On trouve comme conditions de Cauchy-Riemann
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} = i\frac{\partial}{\partial r}$$
4. On montre facilement qu'il y a deux inclusions réciproques. Les polynômes holomorphes sont ceux qui n'ont pas de $\overline{Z}$.
5. Quand on demande que f aie un développement en série entière, on demande que la converge soit absolue. On peut donc permuter autant que nécessaire les termes, et appliquer la question précédente. Pour être holomorphe, il suffit qu'il n'y aie aucun terme avec un $\overline{z}$ dans le résultat.

Exercice 3 Les questions sont encore indépendantes :

1. Pour α, il suffit de manipuler des identités de la forme $2dx = dz + d\overline{z}$.
2.
3.

Exercice 4 On peut traiter le cas de la droite, du cercle et de la courbe C^1 d'un seul coup en observant que si l'image de f est contenu dans une courbe, alors l'image de la différentielle de f en chaque point est contenue dans la tangente à la courbe au point considéré. En particulier, cela implique, f étant holomorphe, que sa différentielle est nulle.

Exercice 5

1. Il s'agit d'appliquer la bonne transformation d'Abel.
2. On écrit $f(z) - f(z_0)$ comme $\sum a_n z_0^n((z/z_0)^n - 1)$ et on applique encore une transformation d'Abel bien choisie.
3. On reconnait la valeur de $\log|1 - e^{i\theta}|$.

Exercice 6

1. Il faut développer la somme et calculer directement.
2. * On multiplie l'égalité précédente par le bon nombre complexe de module 1, pour pouvoir supposer que $a_n = |a_n|$. Après, on prend la partie réelle de l'égalité, pour obtenir $\mathrm{Re} f.\cos(n(\theta - \theta_n))$. Si on rajoute $0 = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f)(re^{\imath\theta})d\theta$, on remplace cos par $1 + \cos$, ce qui est positif et permet de conclure.
Pour l'inégalité sur M_f, on majore brutalement les termes de la somme.
3. Appliquer 2) à $f - f(0)$.

Exercice 7 On paramétrise le bord de K par une courbe γ paramétrée par longueur d'arc. L'aire de K est égale à l'intégrale de la 1 forme le long de γ par Green- Riemann. On observe que cela donne

$$\int_0^L \mathrm{Im}(\overline{\gamma(t)}\gamma'(t))dt.$$

La fonction γ peut être vue comme continue et C^1 par morceaux, et L périodique. On peut donc appliquer le théorème sur la convergence de la série de Fourier de $\gamma = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2i\pi nt/L}$. On calcule, on rassemble les termes, etc et

$$A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi n|a_n|^2.$$

Par ailleurs,

$$L = \int_0^L |\gamma'|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{4\pi^2 n^2}{L}|a_n|^2.$$

Comme $n^2 \geq n$, le problème est résolu. De plus, il y a égalité quand tous les a_n sont nuls, sauf $a_{0,1}$, ce qui correspond au cas du cercle.

Exercice 8 Plusieurs observations sont nécessaires. D'abord, on calcule

$$\psi_k(z)^p = \frac{z^{p(k+1)}}{2^p}\sum_{\ell=0}^{p}\binom{p}{\ell}z^\ell.$$

Fixons $k \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $(k+2)/(k+1) \leq \lambda$. Alors dans le développement de $F\circ\psi_k$, chaque puissance de z n'apparait qu'une seule fois, car $p_n(k+2) < p_{n+1}(k+1)$.

Supposons que la série entière de $F \circ \psi_k$ converge sur le cercle de rayon $1+\epsilon$ centré en 0. Alors on trouve pour $|z| > 1$ et $z = u^k$,

$$\sum |a_n||z|^{p_n} \leq \sum |a_n| \sum_{\ell=0}^{p_n}\binom{p_n}{\ell}\frac{1}{2^{p_n}}|u|^{kp_n} \leq \sum |a_n| \sum_{\ell=0}^{p_n}\binom{p_n}{\ell}\frac{1}{2^{p_n}}|u|^{kp_n+\ell}$$

Ceci converge absolument pour $|u| < 1+\epsilon$ par hypothèse. Et on a montré que le rayon de convergence de F est > 1.

Il reste à voir le rapport entre le rayon de convergence de $F \circ \psi_k$ et le fait de pouvoir prolonger F autour d'un point du cercle unité. En fait, l'image du disque de rayon $1+\epsilon$ centré en 0 par ψ_k est un domaine du plan complexe qui est contenu dans le disque unité sauf une petite partie autour de 1 (cela pour ϵ assez petit).

Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que l'image du disque unité est une partie du disque unité qui ne touche le bord du disque qu'en 1, ce qui facile.