Analyse Complexe TD 2 (20/02 – 23/02)

Exercice 1 Si $\gamma(t) = it$, dz le long de la courbe vaut idt, et non seulement dt.

Exercice 2 Utiliser le log. Les seuls cas favorables sont ceux que l'on pense (α entier).

Exercice 3

1. On peut utiliser une formule de Cauchy sur une couronne obtenue en enlevant un petit cercle centré en 0. On fait tendre le rayon du petit cercle vers 0. Le fait que f soit bornée assure que cela se passe bien, et pour $z \in 1/2\mathbb{D} \setminus \{0\}$, on a
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{S}/2} \frac{f(w)}{w - z} dw. \tag{1}$$
On obtient ainsi un bon candidat pour prolonger f de façon holomorphe à $\mathbb{D}$.
2. C'est une question locale, donc on peut supposer que $U = \mathbb{D}$. On pose $F(re^{i\theta}) = \int_0^r f(te^{i\theta})e^{i\theta}dt$. Il suffit pour conclure de vérifier que l'on a bien $dF = f(z)dz$. L'hypothèse du théorème permet de faire exactement cela.
3. $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.
4. On prolonge f par la formule de la question 3). Pour montrer que le résult est holomorphe sur U tout entier, on utilise le théorème de Morera. En effet l'intégrale sur un triangle inclu dans U_+ ou dans U_- est nulle (holomorphie dans $U \setminus \mathbb{R}$ + continuité sur U). Pour les triangles qui coupent $\mathbb{R}$, il suffit de les découper en triangles plus petits.

Exercice 4 C'est une conséquence simple de la formule de Cauchy.

Exercice 5 Autour de la formule de Cauchy.

1. Comme g est C^1, sa série de Fourier converge absolument. On trouve ainsi les coefficients du développement en série entière de f directement. On montre aussi que f est continue au bord, et que les valeurs sur le bord sont celles de g^+ qui est la somme des termes à fréquence positive de la série de Fourier de g.
2. Il s'agit de prendre une famille de courbe γ qui s'approchent du bord de K. La continuité de f permet de s'assurer que tout converge correctement. Pour l'existence d'une telle famille de courbe, on peut invoquer le théorème du voisinage tubulaire, ou en refaire un démonstration (considérer la courbe $\gamma_0 + \epsilon i \gamma_0'$ où γ_0 paramétrise le bord de K, et ϵ est assez petit).
3. * Comme f est continue sur le cercle unité, ses coefficients de Fourier (sur le cercle unité) tendent vers 0, par Riemann-Lebesgue. Si on arrive à montrer que ce sont des entiers, on a gagné. Mais en appliquant la question précédente, on trouve que comme f est continue sur le disque fermé, les coefficients de son développement en série entière sont exactement ses coefficients de Fourier sur le cercle
4. ** On passe en polaire :
$$Tf(z) = \frac{2i}{\pi} \int f(z + re^{i\theta})e^{-i\theta} dr d\theta.$$
Cela permet de répondre aux questions de régularité par intégrale à paramètre. Pour calculer la dérivée complexe de Tf, on calcule directement contre une fonction test $\phi \in C_c^\infty(U)$. On remarque que pour la mesure cartésienne, l'adjoint de $\partial/\partial\overline{z}$ est $\partial/\partial z$. Ainsi, on cherche à calculer
$$\int \frac{\partial Tf}{\partial \overline{z}} \phi |dz|^2 = -\int Tf(z) \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} |dz|^2 = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(w)}{w - z} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} |dz|^2 |dw|^2.$$
Il reste à montrer que
$$\phi(w) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} \frac{1}{w - z} |dz|^2.$$
C'est la formule de Pompéiu.
Le fait que Tf soit C^∞ en dehors du support de f est une simple application du la régularité des intégrales à paramètres.

Exercice 6

1. On peut le faire avec des séries entières, ou comme dans la preuve du théorème de Morera.
2. Au choix d'une constante près, g est une primitive de f'/f.

Exercice 7 Il s'agit de constater que le Jacobien d'une fonction holomorphe injective est $|f'|^2$. Dans le cas du disque, on trouve

$$A(f(\mathbb{D})) = 2\pi \sum_{n\geq 1} \frac{n^2|a_n|^2}{n+2}$$

Exercice 8 Les intégrales convergent grâce au théorème des séries alternées. En fait les deux premières intégrales sont un cas particulier pour $\alpha = i$. Il s'agit d'utiliser la formule de Cauchy. On considère le contour formé par la part de camembert entre $\left[0, \sqrt{|\alpha|}R\right]$ et $[0, \sqrt{\alpha}R]$, où $\sqrt{\ }$ est la détermination usuelle de la racine carrée sur $\Re\alpha \geq 0$. On doit trouver

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$