Analyse Complexe TD 3 (27/02 – 2/03)

Exercice 1 Émanations du Principe du Maximum, I.

1. Montrer un équivalent du théorème de Liouville pour les fonctions qui sont $\mathcal{O}(|z|^D)$ quand $|z| \to \infty$.
2. Soit f une fonction entière. Montrer que si $|f| \to \infty$ quand $|z| \to \infty$, alors f est un polynôme.
3. *Les 3 cercles d'Hadamard.* Soit f une fonction holomorphe sur la couronne $C = \{z; r_1 < |z| < r_2\}$ et continue sur $\overline{C}$. Pour $r_1 \leq r \leq r_2$, on note $M_f(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer que la fonction $s \mapsto \log M_f(e^s)$ est convexe. Considérer les fonctions $z^p f^q$.
4. *Les 3 droites d'Hadamard.* Soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert $\{\Re z \in]0,1[\}$, continue et bornée sur $\{\Re z \in [0,1]\}$. Si $M(s) = \sup_{\Re z = s} |f(z)|$, montrer que $\ln M$ est convexe.
5. * Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{D}(0,r)$, telle que $f(0)$ ne soit pas nul. On note $M = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (indépendante de f) telle que le nombre de zéros de f dans $D(0, r/3)$ est inférieur ou égal à $C \log(M/|f(0)|)$. À cet effet, considérer $g(z) = f(z)/\Pi(1 - z/z_m)$ où les z_m sont les zéros de f dans $D(0, r/3)$.

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ telle que $f'(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $r > 0$, $\eta > 0$ tels que

$$w \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} \mathrm{d}z$$

définit une réciproque locale pour f sur $D(f(0), \eta)$.

Exercice 3

1. Soit f holomorphe dans un voisinage de $D(0,R)$, montrer que
$$f(w) = \frac{-R^2}{2i\pi} \int_{D(0,R)} \frac{f(z)}{(R^2 - \bar{z}w)^2} |\mathrm{d}z|^2 \quad \forall w \in D(0,R). \qquad \text{(Noyau de Bergman)}$$
2. Qu'en déduisez vous pour une suite de fonctions holomorphes (f_n) qui converge en norme L^p, $p \geq 1$, sur un ouvert Ω, vers une fonction f ?
3. En utilisant le théorème de Baire, montrer qu'une limite simple de fonction holomorphes sur un ouvert U est une fonction qui est holomorphe sur un ouvert V dense dans U.

Exercice 4 Émanations du Principe du Maximum, II.

1. * Soit f une fonction entière. On dit que f est *d'ordre fini* si il existe $A > 0$, $B > 0$ tels que $|f(z)| \leq \exp(A(1 + |z|)^B)$. Montrer que soit f est surjective, soit il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $a \notin f(\mathbb{C})$, et pour tout $w \neq a$, $f^{-1}(w)$ est infini.
2. * *Mieux !* Soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert $\{\Re z \in]0,1[\}$, continue et tempérée sur $\{\Re z \in [0,1]\}$. Autrement dit, il y a un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|f(\sigma + it)| \leq C(1 + |t|)^\alpha$ pour $\sigma \in [0,1]$. Supposons que
$$\limsup_{|t| \to \infty} \log |f(\sigma + it)| / \log |t| \leq \alpha_\sigma \text{ pour } \sigma = 0, 1.$$
Montrer que la même chose est vraie pour tout $\sigma \in [0,1]$ avec $\alpha_\sigma = \sigma\alpha_1 + (1 - \sigma)\alpha_0$. Penser à multiplier f par une fonction holomorphe appropriée, de sorte à ce que le résultat soit borné. On peut en fait autoriser une croissance plus rapide pour f, laquelle ?
3. * *Phragmén-Lindelöf* Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $U_\alpha = \{|\arg z| < \pi/2\alpha\}$, avec $\alpha > 1/2$. On suppose que f est continue sur $\overline{U_\alpha}$, bornée sur la frontière de U_α par un réel $M > 0$, et vérifie $|f| \leq Ce^{|z|^\beta}$ sur U_α pour un certain $\beta < \alpha$. Montrer que f est bornée par M sur U_α.

Exercice 5 Calculer de nouveau l'intégrale

$$\alpha \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx,$$

pour $\Re\alpha > 0$, cette fois-ci sans utiliser la formule de Cauchy !

Exercice 6 Montrer que les fonctions holomorphes du disque dans lui même qui sont propres (i.e. $|f| \to 1$ quand $|z| \to 1$), sont des produits finis d'automorphismes du disque.

Exercice 7

1. Montrer que les automorphismes (au sens d'ouverts de $\mathbb{C}$) du disque sont exactement :
   a. Les fonctions du disque dans lui même qui préservent le birapport de nombres complexes
   $$[a, b; c, d] = \frac{a-c}{b-c}\frac{b-d}{a-d}.$$
   b. Les difféomorphismes du disque dans lui même qui préservent l'orientation et la quantité
   $$\rho(z_1, z_2) = 2\text{argth}\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z_2}}\right|.$$
2. Que deviennent (1) et (2) dans le cas des automorphismes du demi-plan de Poincaré ?

Exercice 8 Soit X l'ensemble des fonctions holomorphes $f : \{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0 \text{ et } \Re z > 0\} \to D(0,1)$ telles que $f(1+i) = 0$. Déterminer $\sup_{f\in X} |f(2+i)|$.