Analyse Complexe TD 3 (27/02 – 2/03)

Exercice 1 Émanations du Principe du Maximum, I.

1. Il y a deux façons de faire. Soit on se ramène à une fonction bornée pour appliquer Liouville, soit on refait la preuve de Liouville.
   1. On écrit $f(z) = a_0 + \cdots + a_D z^D + z^{D+1} g(z)$ avec g holomorphe. Alors on trouve que g tend vers 0 à l'infini, ce qui implique par Liouville que g est nulle. **2.** On peut aussi écrire le développement en série entière de $f = \sum a_n z^n$ et trouver
   $$|a_n| \leq \frac{1}{R^n} \sup\{|f(z)|,\ |z| = R\}.$$
   Le membre de droite tend vers 0 pour $n \geq D+1$.
2. Comme f est propre, elle n'a qu'un nombre fini de zéros. On peut donc trouver un polynôme P qui s'annule exactement en ces points, avec les même multiplicités. On trouve que P/f est holomorphe, et satisfait les hypothèse de la question précédente. C'est donc un polynôme. Mais comme il ne s'annule pas, c'est même un polynôme constant.
3. *Les 3 cercles d'Hadamard.* Il y a deux façons de résoudre cette question. La première directement, la deuxième en utilisant la question suivante.
   Pour montrer que la fonction est convexe, il faut montrer qu'elle est en dessous de chacune de ses cordes. Si f satisfait les hypothèse du théorème pour la couronne $C(r_1, r_2)$, elle les satisfait aussi pour chaque sous couronne. En particulier, il suffit de montrer que $\log M_f(e^{\cdot})$ est au dessus de la corde entre $\log r_1$ et $\log r_2$.
   Pour savoir quoi faire, on essaye d'utiliser le principe du maximum. On constate que si la corde est horizontale, ça marche directement. Plus généralement,
   $$\log M_f(e^s) \leq \max\{\log M_f(r_1),\ \log M_f(r_2)\}.$$
   L'idée principale de la preuve consiste à remplacer f par une fonction g telle que (autant que possible) $M_g(r_1) = M_g(r_2)$. On constate que si $f_{p,q} = z^p f^q$, $\log M_{f_{p,q}}(e^s) = ps + q \log M_f(e^s)$. Autrement dit, passer de f à $f_{p,q}$ se traduit par un changement affine sur la fonction $\log M_f(e^s)$. Un tel changement préserve les barycentres, c'est bon signe ! La condition pour que $M_{f_{p,q}}(r_1) = M_{f_{p,q}}(r_2)$ est
   $$r_1^p M_f(r_1)^q = r_2^p M_f(r_2)^q \iff \frac{p}{q} = \frac{\log M_f(r_2)/M_f(r_1)}{r_1/r_2} = \alpha.$$
   Il n'y a pas de raison pour que la quantité dans le membre de droite soit rationnel. On se donne donc une suite (p_n), (q_n) avec $q_n > 0$, et $p_n/q_n \to \alpha$. On applique enfin le principe du maximum (q_n est positif !)
   $$\log M_f(e^s) \leq \max\left\{\frac{1}{q_n} \log M_{f_{p_n,q_n}}(r_1),\ \frac{1}{q_n} \log M_{f_{p_n,q_n}}(r_2)\right\} - \frac{p_n}{q_n} s$$
   On calcule rapidement pour trouver que chacun des deux termes dans le maximum tend vers
   $$\alpha \log r_1 + \log M_f(r_1) = \alpha \log r_2 + \log M_f(r_2).$$
   Je donne la deuxième preuve après la question suivante.

4. *Les 3 droites d'Hadamard.* Ce cas ci est relativement plus simple. Par contre, il faut payer un peu plus au début. En effet, rien ne garantit a priori que le maximum est bien sur le bord, et non à l'infini. On utilise donc
   $$\sup |f| = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{|f(z)|}{|z+1|^\epsilon} \leq \lim_{\epsilon \to 0} \sup_{\Re z = 0 \text{ ou } \Re z = 1} \frac{|f(z)|}{|z+1|^\epsilon} = \sup_{\Re z = 0 \text{ ou } \Re z = 1} |f(z)| \tag{1}$$
   Maintenant, si on s'inspire de la preuve précédente, on cherche des fonctions holomorphes sur la bande dont le module est constant sur les droites verticales. Parmi les fonctions que l'on connait, le choix n'est pas très grand ! On se donne donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\sup\{|f(it)|,\ t \in \mathbb{R}\} = e^\lambda \sup\{|f(1+it)|,\ t \in \mathbb{R}\}.$$
   Appliquons alors le principe du maximum à $f_\lambda(z) = e^{\lambda z} f(z)$. On trouve directement
   $$\log M(s) + \lambda \Re s \leq \sup\{|f(it)|,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Comme précédemment, f vérifie les hypothèse du théorème sur toute sous-bande, et donc il suffisait effectivement de vérifier que $\log M(s)$ est en dessous de la corde entre $s = 0$ et $s = 1$.

Revenons aux 3 cercles d'Hadamard. si f est une fonction sur la couronne $C(r_1, r_2)$ la fonction $g(z) = f(e^z)$ est définie sur une bande, et satisfait les hypothèse du théorème des 3 bandes. Comme $M_g = M_f(e^\cdot)$, la propriété de convexité recherchée a déjà été démontrée.

5. * Comme indiqué dans l'énoncé, on considère $g(z) = f(z)/\prod(1 - z/z_m)$. On note k le nombre de zéros (comptés avec multiplicité). La fonction g est holomorphe sur le même domaine, et $g(0) = f(0)$. Par ailleurs,
$$\sup\{|g(z)|,\ |z| = r\} \leq M\frac{1}{2^k}.$$
Autrement dit,
$$k \leq \frac{1}{\log 2}\log\frac{M}{|f(0)|}.$$

Exercice 2

Comme $f'(0) \neq 0$, f est un biholomorphisme local autour de 0. En particulier, pour r assez petit et η encore plus petit, $f(z) \neq w$ pour z sur le cercle de rayon r et $|w| \leq \eta$. Ceci étant donné, on peut appliquer une formule de changement de variable avec $u = f(z)$. On obtient exactement la formule de Cauchy pour f^{-1}.

Exercice 3

1. D'abord, par changement de variable, on peut se ramener au cas où $R = 1$. Ensuite, on trouve que c'est vrai pour $w = 0$, en utilisant la formule de la moyenne. Enfin, on veut appliquer le cas $w = 0$ à $f_v := f \circ \mu_v$ où μ_v est l'automorphisme $\mu_v(z) = (v - z)/(1 - \overline{v}z)$. On trouve
$$f(v) = f_v(0) = \frac{-1}{2i\pi}\int f(\mu_v(z))|dz|^2$$
on prend le changement de variable $u = \mu_v(z)$ (autrement dit $z = \mu_v(u)$).
$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{-1}{2i\pi}\int f(u)\left|\mu_v'(u)\right|^2|du|^2 \\ &= \frac{-1}{2i\pi}\int \frac{f(u)}{(1-\overline{u}v)^2}\frac{(1-|v|^2)^2}{(1-u\overline{v})^2}|du|^2. \end{aligned}$$
Enfin on applique cette formule à $g(u) = f(u)(1 - u\overline{v})^2/(1 - |v|^2)^2$ au point v.
2. À partir de la question précédente, on déduit qui (f_n) est une suite de fonctions qui convergent en norme L^p sur un ouvert Ω, alors elle converge uniformément sur tout compact de Ω.«
3. On prend les ensembles $U(n, M) = \{|f_n| \leq M\}$. Comme f_n converge simplement vers f, on a $\cup_M \cap_n U(n, M) = U$. En particulier, d'après le lemme de Baire, il y a un $\cap_n U(n, M)$ qui est d'intérieur non vide. En utilisant la formule de Cauchy dans cet ouvert, on trouve que f y est holomorphe, par convergence dominée.

Exercice 4

Émanations du Principe du Maximum, II.

1. * On suppose que f n'est pas surjective. Quitte à translater, on suppose que f évite 0. Alors on peut écrire $f = e^g$. D'après le lemme de la partie réelle, on trouve que g est un polynôme. Un polynôme prend un nombre infini de fois une valeur modulo $2i\pi\mathbb{Z}$.
2. * *Mieux !* On va suivre la même astuce que pour le théorème des trois droites. D'abord, on peut se restreindre à la demi-bande supérieure, par symmétrie. On considère
$$g_\epsilon(z) = f(z)\frac{1}{(1+z)^{\alpha_0}}e^{(\alpha_0-\alpha_1)z\log(z/i)}e^{\epsilon z^2}. \tag{2}$$
On constate rapidement que g_ϵ est bornée, et tend vers 0 dans l'infini de la bande. Elle atteint donc son maximum sur le bord. Par hypothèse, g_0 est bornée sur le bord de la bande. Ainsi on passe à la limite en $\epsilon \to 0$, et on obtient exactement ce que l'on veut.
En fait, on pouvait autoriser f à croitre comme $e^{C|t|^{2-\nu}}$ pour $\nu > 0$.
3. * *Phragmén-Lindelöf* Encore une fois, il s'agit d'utiliser une fonction avec un paramètre. En l'occurence, on pose
$$g_\epsilon(z) = f(z)e^{-\epsilon z^\gamma} \tag{3}$$
où on a choisi $\beta < \gamma < \alpha$. On constate aisément que g_ϵ est bornée, et tend vers 0 à l'infini.

Exercice 5 Pour calculer la Gaussienne sans faire de calcul, on peut voir cette intégrale comme une intégrale à paramètre holomorphe. Par prolongement unique, on trouve la valeur directement en ne calculant que dans le cas où $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Cela donne $\sqrt{\pi/\alpha}$, avec la détermination usuelle de la racine.

Exercice 6 Une fonction propre du disque dans lui même a un nombre fini de zéros. On peut donc diviser f par un produit fini d'automorphismes du disque, pour obtenir une fonction g, propre du disque dans lui même, qui en plus ne s'annule pas. En appliquant le principe du maximum à g et $1/g$, on obtient que g est constante.

Exercice 7 Il s'agit d'utiliser le lemme de Schwarz. On a un biholomorphisme g_0 entre $\mathbb{D}$ et $\{\Im z, \Re z > 0\}$, donné par

$$g_0(z) = \sqrt{\frac{(z+i)}{i(z-i)}}$$

avec la détermination principale du logarithme. On peut remarquer que $g_0(0) = \sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$. On pose donc $g(z) = g_0(z)\sqrt{2}$. On trouve que $h := f \circ g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ envoie 0 sur 0.

$$|f(z)| \leq |(g^{-1}(z)|.$$

Alors : $g^{-1}(2+i) = (-1+3i/2)(-3+3i/2)$, nombre dont le module est $\sqrt{13/5}/3$.