Analyse Complexe TD 4 (6/03 - 9/03)

Exercice 1

1. Montrer que
$$\prod_{k\geq 0} 1+z^{2^k} = \frac{1}{1-z} \text{ et } \prod_{n\geq 1} \cos\frac{\pi z}{2^n} = \frac{\sin \pi z}{\pi z}.$$
Pour le deuxième, penser à $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.
2. Si $p_1, \dots, p_n, \dots$ est la suite des premiers nombres premiers, montrer que pour $\Re s > 1$,
$$\zeta(s) = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-p_n^{-s}}.$$
3. À partir du développement en fraction rationnelle élémentaire de la fonction cotangente, donner une égalité du même type pour la tangente. En déduire que pour $z \in \mathbb{C}$
$$\cos z = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{z^2}{((2k+1)\pi/2)^2}\right).$$

Exercice 2 Théorème de Paley-Wiener pour les fonction C^∞.

1. Soit ϕ une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$, supportée dans $[-A, A]$. Montrer que sa transformée de fourier $\widehat{\phi}$ a un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$. Montrer aussi qu'il existe des constantes $C_N > 0$ telles que
$$|\widehat{\phi}(\xi)| \leq C_N e^{A|\Im \xi|}(1+|\xi|)^{-N} \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{C} \text{ et tout } N > 0.$$
Commencer par le cas $N = 0$, puis considérer la transformée de Fourier de ϕ'.
2. Réciproquement, si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui vérifie le même type d'inégalité, montrer que $f_{|\mathbb{R}}$ est la transformée de fourier d'une fonction C^∞ à support contenu dans $[-A, A]$. Commencer par montrer que la transformée de Fourier inverse de f est à support compact à l'aide d'un contour rectangulaire.

Exercice 3 Comptage de zéros, I.

1. *Formule de Jensen* Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage du disque $\mathbb{D}$. On suppose que $f(0) \neq 0$, et on note $a_1, \dots, a_n$ ses zéros dans $\overline{\mathbb{D}}$, comptés avec multiplicité. Montrer que
$$\log|f(0)| + \sum_1^n \log\left|\frac{1}{a_i}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{\imath\theta})| \mathrm{d}\theta.$$
Penser à utiliser les automorphismes du disque.
2. * *Formule de Carleman* On suppose de plus que f ne s'annule pas sur $i\mathbb{R}$. Que devient le membre de droite dans l'égalité précédente si l'on ne somme plus que sur les zéros de f qui sont dans le demi-disque $\{\Re z > 0\} \cap \mathbb{D}$?

Exercice 4

1. * Soit f une fonction holomorphe bornée non constante sur le disque unité. Si (z_n) est la suite des zéros de f, comptés avec multiplicité, montrer que
$$\sum 1 - |z_n| < +\infty. \qquad \text{(Condition de Blashke)}$$
2. Réciproquement, on se donne une suite de nombre complexes (z_n) dans $\mathbb{D}$, et on suppose que la somme précédente converge. Construire un produit d'automorphismes du disque qui s'annule exactement en les (z_n), et vérifier que le produit converge correctement. On appelle cela un *produit de Blashke*.
3. En fonction de la suite des z_n, quel est l'ouvert connexe maximal de $\mathbb{C}$ sur lequel cette fonction se prolonge de façon holomorphe ?
4. Indépendamment, si U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, montrer qu'il existe une fonction holomorphe sur U qui ne peut être prolongée à aucun ouvert strictement plus grand que U de manière holomorphe.

Exercice 5 Soit f une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{D}$, avec $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Soit $M = \sup_{\mathbb{D}} |f|$. Soit $u \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe g sur $\mathbb{D}$ telle que $g(z)^2 = 1 - f(z)/u$ pour tout z, et $g(0) = 1$.
2. ** Montrer que $|u| \geq |f'(0)|^2/(4M)$ et en déduire que

$$D\left(0, \frac{|f'(0)|^2}{4M}\right) \subset f(\mathbb{D}).$$

Exercice 6

1. Soit p un polynôme, sans zéros réels. On considère l'opérateur différentiel sur la droite réelle $P = p(-\imath\partial_x)$, agissant sur les fonctions C^∞ a support compact. À l'aide de la transformée de Fourier, montrer que P est inversible dans un espace bien connu (et identifier l'inverse).
2. Maintenant, si p est un polynôme réel, en considérant la famille $p - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus p(\mathbb{R})$, identifier le spectre de P. En considérant $R(\lambda) = (P - \lambda)^{-1}$ quand λ n'est pas dans le spectre, calculer le noyau de Schwarz $K(x, y, \lambda)$ de $R(\lambda)$, i.e la fonction K telle que

$$R(\lambda)f(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y, \lambda)f(y)\mathrm{d}y \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

3. En fonction du degré de p, R est définie sur un demi-plan complexe, ou sur le plan complexe privé d'une demi-droite. À l'aide d'une transformation simple de la variable λ, ramenez-vous au cas d'un demi-plan, et montrez que le noyau K se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Si vous avez du courage, identifiez ses pôles.