Analyse Complexe
TD 6

Exercice 1 Calculer la somme des $1/(z^3 - n^3)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, pour z n'étant pas un entier.

Exercice 2 Montrer que toutes les solutions de $z \sin z = 1$ sont réelles. On pourra appliquer le théorème de Rouché aux fonction $z \mapsto z \sin z$ et $z \mapsto z \sin z - 1$.

Exercice 3 Soit $n \geq 2$ un entier. En évaluant l'intégrale de la fonction

$$z \mapsto \frac{e^{\frac{2i\pi z^2}{n}}}{e^{2i\pi z} - 1}$$

le long du contour délimitant le rectangle de sommets $\pm iR$, $\pm iR + n/2$ privé des disques de rayon ϵ centrés en 0 et $n/2$, calculer la somme de Gauss

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi k^2/n}.$$

Exercice 4 Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, qui converge uniformément vers f sur U.

1. Si les f_n sont toutes injectives, montrer que soit f l'est aussi, soit f est constante.
2. Si les f_n ne s'annulent pas, montrer que soit f ne s'annule pas non plus, soit f est constante.

Exercice 5

1. Soit g holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1)$. On suppose que g est injective, et que $g(z) = z + b_1/z + \cdots + b_n/z^n + \ldots$ est son développement de Laurent. Alors, en considérant l'aire du complémentaire de l'image de g, montrer que
$$\sum_n n|b_n|^2 \leq 1.$$
2. Maintenant, on suppose que $g = z + a_2 z^2 + \ldots$ est holomorphe sur le disque unité, et injective. En considérant $f(z) = g(z^{-2})^{-1/2}$ (montrer que ceci défini bien une fonction holomorphe), montrer que $|a_2| \leq 2$.
3. Enfin, avec les mêmes hypothèses que la question précédentes, montrer que $D(0, 1/4) \subset g(D(0,1))$. Utilisez les fonctions $h(z) = ug(z)/(u - g(z))$.
4. Trouver les fonctions g de cette forme pour lesquelles $D(0, 1/4)$ est le plus grand disque centré en zéro contenu dans l'image de g.

Exercice 6

1. Soit $(z_n)_{n \geq 1}$ une suite injective de complexes telle que $|z_n| \to +\infty$. Soit également $(P_n)_{n \geq 1}$ une suite de polynômes à coefficients complexes. En développant en série entière $z \mapsto P_n(1/(z - z_n))$ sur $D(0, |z_n|)$, montrer qu'il existe une suite $(Q_n)_{n \geq 1}$ de polynômes telle que la série de fonctions
$$z \mapsto \sum_{n=1}^{N} P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right) - Q_n(z)$$
converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \{z_n,\ n \geq 1\}$. Il s'agit du théorème de Mittag-Leffler.

2. En déduire que si l'on se donne une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ comme ci-dessus, des entiers $d_n \geq 1$ et des complexes $a_{n,0}, \ldots, a_{n,d_n}$ pour chaque $n \geq 1$, alors il existe $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que pour tout $n \geq 1$ et tout $0 \leq k \leq d_n$,
$$h^{(k)}(z_n) = a_{n,k}.$$
3. Soient $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ n'ayant pas de zéro commun. Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telles que $f + h_1 g = e^{h_2}$.
4. Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que
$$f_1\mathcal{O}(\mathbb{C}) + \ldots + f_n\mathcal{O}(\mathbb{C}) = h\mathcal{O}(\mathbb{C})$$
où
$$f_1\mathcal{O}(\mathbb{C}) + \ldots + f_n\mathcal{O}(\mathbb{C}) := \{u_1 f_1 + \ldots + u_n f_n \mid u_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\}.$$
On dit que $\mathcal{O}(U)$ est un *anneau de Bézout*.
5. Donner un exemple de famille $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que
$$\{u_1 f_1 + \ldots + u_r f_r \mid r \geq 1,\ \forall k\ u_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\}$$
ne soit pas de la forme $h\mathcal{O}(\mathbb{C})$, avec $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.