Analyse Complexe
TD 6

Exercice 1 Calculer la somme des $1/(z^3 - n^3)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, pour z n'étant pas un entier.

Exercice 2 Montrer que toutes les solutions de $z \sin z = 1$ sont réelles. On pourra appliquer le théorème de Rouché aux fonction $z \mapsto z \sin z$ et $z \mapsto z \sin z - 1$.

Exercice 3 Soit $n \geq 2$ un entier. En évaluant l'intégrale de la fonction

$$z \mapsto \frac{e^{\frac{2i\pi z^2}{n}}}{e^{2i\pi z} - 1}$$

le long du contour délimitant le rectangle de sommets $\pm iR$, $\pm iR + n/2$ privé des disques de rayon ϵ centrés en 0 et $n/2$, calculer la somme de Gauss

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi k^2/n}.$$

Exercice 4 Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, qui converge uniformément vers f sur U.

1. Si les f_n sont toutes injectives, montrer que soit f l'est aussi, soit f est constante.
2. Si les f_n ne s'annulent pas, montrer que soit f ne s'annule pas non plus, soit f est constante.

Exercice 5

1. Soit g holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1)$. On suppose que g est injective, et que $g(z) = z + b_1/z + \cdots + b_n/z^n + \ldots$ est son développement de Laurent. Alors, en considérant l'aire du complémentaire de l'image de g, montrer que
$$\sum_n n|b_n|^2 \leq 1.$$
2. Maintenant, on suppose que $g = z + a_2 z^2 + \ldots$ est holomorphe sur le disque unité, et injective. En considérant $f(z) = g(z^{-2})^{-1/2}$ (montrer que ceci défini bien une fonction holomorphe), montrer que $|a_2| \leq 2$.
3. Enfin, avec les mêmes hypothèses que la question précédentes, montrer que $D(0, 1/4) \subset g(D(0,1))$. Utilisez les fonctions $h(z) = ug(z)/(u - g(z))$.
4. Trouver les fonctions g de cette forme pour lesquelles $D(0, 1/4)$ est le plus grand disque centré en zéro contenu dans l'image de g.

Exercice 6 Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$, régulier et telle que $\gamma(s) = \gamma(t)$ si et seulement si $s - t \in \mathbb{Z}$. En considérant la fonction $u \mapsto \int_{\gamma|_{[0,1]}} \frac{1}{z-u} dz$ et ce qu'il en advient lorsque u "traverse" la courbe, montrer que $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ n'est pas connexe. En déduire que $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ a deux composantes connexes. C'est une version faible du théorème de Jordan (la version générale ne suppose pas que γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et régulier mais seulement continu).

Exercice 7

1. Si les W_p sont les facteurs principaux de Weierstrass, montrer que pour $|z| \leq 1$,
$$|W_p(z) - 1| \leq |z|^{p+1}$$
À cet effet, considérer le développement de $W_p = 1 + \sum b_k z^k$: quel est le signe des b_k, et quelle est leur somme ?

2. Si f est une fonction holomorphe d'ordre fini λ qui ne s'annule pas en zéro, et les a_n sont ses zéros comptés avec multiplicité et module croissant, montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_n |\frac{r}{a_n}|^{\lambda+\epsilon} < +\infty.$$

3. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et g une fonction entière telle que

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_n W_{\lfloor \lambda \rfloor}(\frac{z}{a_n})$$

On appelle cette factorisation la « factorisation canonique » de Weierstrass.

4. (plus difficile) En considérant des dérivées d'ordre assez grand de la dérivée logarithmique de f, montrer que g est un polynôme d'ordre $\leq \lambda$. [Utilisez la formule de Jensen pour obtenir une expression comportant d'une part une somme sur les zéros de module plus petit que r, et de l'autre une intégrale sur un cercle. Enfin, utilisez sans retenue l'hypothèse que f est d'ordre fini pour conclure.]

Exercice 8 Soit f une fonction entière non constante dont tous les zéros sont réels, telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, et dont l'ordre est strictement inférieur à 2. En considérant $\mathrm{Im}(f'/f)$, montrer que tous les zéros de f' sont réels.

Exercice 9 On note x_n la solution de $x = \tan x$ dans $[n\pi, n\pi + \pi/2[$. En utilisant la fonction $\sin - x\cos$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{10}. \tag{1}$$