Analyse Complexe TD 7 (27/03 - 30/03)

Exercice 1 Soit f une fonction holomorphe du disque dans lui même. Montrer le lemme de Schwarz-Pick : pour tout $z \in D(0,1)$,

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Exercice 2 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. On se donne $f \in \mathcal{O}(U)$. A quelle condition f a-t-elle une primitive sur U ? Traduisez ce résultat pour le cas de f méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3 Soit ϕ une transformation de Möbius.

1. Montrer que ϕ est conjuguée par des homographies, soit à une rotation dans le disque, soit à une homothétie dans le demi-plan de Poincaré, soit à une translation, encore dans le demi-plan de Poincaré. Examiner le nombre de points fixes de ϕ sur le cercle en fonction des cas.
2. Déterminer s'il existe une fonction holomorphe bornée non constante sur le disque, invariante par ϕ. On pourra considérer l'orbite d'un point du disque ouvert par ϕ.

Exercice 4 Calculer le π_1 de $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Exercice 5 (Théorème de Müntz-Szasz) On se donne $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, on considère X, la fermeture dans $C := C^0([0,1], \mathbb{C})$ de l'espace vectoriel engendré par les $(t^{\lambda_i})_i$. Si μ est une mesure complexe finie sur $[0,1]$, on pose $f_\mu(z) := \int t^z \mathrm{d}\mu$.

1. Si $\sum 1/\lambda_i = +\infty$, montrer que $X = C$. (Vous pouvez considérer des mesures μ qui s'annulent sur les t^{λ_i} ; f_μ est bornée et holomorphe sur un demi-plan. Pensez aux produits de Blaschke).
2. Réciproquement, si $\sum 1/\lambda_i < \infty$, on pose

$$f(z) = \frac{z}{(2+z)^3} \prod_i \frac{\lambda_i - z}{2 + \lambda_i + z}.$$

Montrer que f est bien définie, holomorphe sur $\mathrm{Re} z > -2$, puis établir

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(-1+\imath s)}{-1+\imath s - z} \mathrm{d}s \text{ tant que } \mathrm{Re} z > -1.$$

En trouvant une mesure μ telle que $f = f_\mu$, concluez que $X \neq C$.

Exercice 6

1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Vérifiez que la relation entre courbes fermées de U définie par $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si et seulement si $Ind_{\gamma_1}(Q) = Ind_{\gamma_2}(Q)$ pour tout $Q \notin U$, est bien une relation d'équivalence. On dit que γ_1 et γ_2 sont *homologues*. L'ensemble des classes d'équivalence est noté $H_1(U)$.
2. Montrer que les classes d'équivalence sont invariantes par homotopie des chemins. Montrer ensuite que la composition des chemins permet de définir une loi de composition dans l'espace des classes d'équivalence, de sorte que $\pi_1(U) \twoheadrightarrow H_1(U)$.
3. ** Calculez $H_1(U)$ dans le cas où $U = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.
4. ** Montrer que $H_1(U)$ est abélien. Vous pouvez montrer avec les moyens dont vous disposez le théorème d'Hurewicz : $H_1(U)$ est l'abélianisé de $\pi_1(U)$.