Analyse Complexe TD 8 (3/04 - 6/04)

Exercice 1 Soit f une fonction holomorphe et bornée sur $U_\alpha = \left\{re^{i\theta} \mid r > 0,\ \theta \in]-\alpha, \alpha[\right\}$ avec $\alpha \in]0, \pi]$. On suppose que

$$\lim_{z \to 0, z \in]0, +\infty[} f(z) = L.$$

Montrer que la suite de fonctions $f_n : z \mapsto f(z/2^n)$ converge uniformément sur tout compact de U_α vers la fonction constante L. En déduire que

$$\lim_{r \to 0} f(re^{i\theta}) = L,$$

uniformément en $\theta \in [-\alpha + \epsilon, \alpha - \epsilon]$, et ce pour tout $\epsilon > 0$.

Exercice 2

1. Rappelez des biholomorphismes entre $\mathbb{D}$, $\mathbb{H}$, $\{\arg z \in]0, \alpha[\}$ avec $\alpha \leq 2\pi$.
2. Construisez un biholomorphisme explicite entre $\mathbb{D}$ et une lunule (domaine en forme de croissant de lune délimité par des arcs de cercle). Pensez à une inversion.
3. Quelle est l'image du demi-plan supérieur par argch ?
4. ** Et avec un disque privé d'un segment orthogonal au cercle bordant le disque ?

Exercice 3

1. Soit U un ouvert connexe, et γ une courbe simple, C^1 par morceaux dans U, délimitant un domaine $V \subset U$. Si f est une fonction holomorphe sur U, et $z \notin f(\gamma([0,1]))$, notons $n_V(z)$ le nombre de préimages de z par f dans V, comptées avec multiplicité. Montrer que
$$n_V(z) = \mathrm{Ind}_{f \circ \gamma}(z).$$
En particulier, n_V est localement constant.
2. Supposons que $U = \mathbb{D}$, que f est propre sur son image ($f(z) \to \partial f(\mathbb{D})$ quand $|z| \to 1$), et continue au bord de $\mathbb{D}$. En notant γ une paramétrisation du cercle, montrer qu'on a encore $n_U(z) = \mathrm{Ind}_{f \circ \gamma}(z)$ pour $z \in f(U) \setminus \partial f(U)$.

Exercice 4

1. Soient f, g deux fonctions continues et ne s'annulant pas sur $\overline{\mathbb{D}}$, holomorphes sur $\mathbb{D}$. On suppose que $|f| = |g|$ sur $\mathbb{S}^1$. Montrer que f et g sont proportionnelles. Faites le d'abord avec l'exercice précédent. Puis trouvez une autre preuve avec le principe de réflexion de Schwarz.
2. ** Et si on ne suppose plus qu'elles ne s'annulent pas ?

Exercice 5

1. Soit n un entier ≥ 3. Considérez la fonction $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ définie par
$$f(z) = \int_0^z \frac{du}{(1 - u^n)^{2/n}}.$$
Montrer d'abord que ceci a bien un sens, et que f est holomorphe sur $\mathbb{D}$, continue au bord. Puis trouvez des symmétries pour f. Par un calcul, déterminez le comportement de f sur l'arc de cercle unité entre 1 et $e^{2\imath\pi/n}$.
2. Déduisez en que f est une transformation conforme de $\mathbb{D}$ sur l'intérieur d'un polygone régulier à n côtés. C'est un cas particulier du théorème de Schwarz-Christoffel :
3. Si $a_1 < \cdots < a_n$ sont des nombres réels, et $0 < \alpha_i < \pi$, $i = 1 \ldots n$ sont des angles, l'application suivante est bien définie :
$$S : z \in \mathbb{H} \mapsto \int_i^z \frac{\mathrm{d}w}{\prod_1^n (w - a_i)^{1 - \alpha_i/\pi}}$$
quitte à choisir des déterminations du logarithme. En supposant que $\sum \alpha_i = (n-2)\pi$, montrer qu'elle s'étend en une fonction S continue sur $\overline{\mathbb{H}} \cup \{\infty\}$. Montrer que $S(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ est une ligne brisée.

4. Si cette ligne brisée est une courbe simple, montrer que S est un biholomorphisme entre $\mathbb{H}$ le domaine délimité par cette courbe, qui est un polygone convexe. Commencez par supposer que S est injective sur $\mathbb{R}$.
   En fait, le théorème de Schwarz-Christoffel affirme que tous les biholomorphismes du demi-plan dans un polygone sont essentiellement de cette forme. Vous pourrez bientôt le montrer vous même.

Exercice 6 Montrer que si U est un ouvert tel que $\mathbb{C} \setminus U$ a un nombre fini de composantes connexes, U est biholomorphe à un ouvert à bord analytique, privé d'un nombre fini de points. Vous pouvez séparer l'ensemble des composantes connexes du complémentaire en un nombre fini de points, les composantes connexes non bornées, et les composantes connexes bornées non réduites à des points. Pensez encore à l'inversion.

Exercice 7 Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si h est une fonction C^∞ et strictement positive sur U, et si γ est un chemin C^1 dans U, on pose

$$\mathrm{long}_h(\gamma) = \int_0^1 h(\gamma(t))|\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $d_h(a,b) := \inf\{\mathrm{long}_h(\gamma) \mid \gamma\ C^1([0,1]) \text{ va de de } a \text{ à } b\}$ définit bien une distance sur U.
2. En fait, à h correspond une 2-forme hermitienne g_z définie de la façon suivante : si $u, v \in \mathbb{C}$, on pose $g_z(u,v) := h(z)^2\mathrm{Re}(u\overline{v})$. Réinterprez la définition de $\mathrm{long}_h(\gamma)$ avec g_h.
3. Si ϕ est holomorphe injective entre V et U, montrer que la 2-forme $\phi^* g_z(u,v) = h(\phi(z))^2|\phi'(z)|^2\mathrm{Re}(u\overline{v})$ fait de ϕ une isométrie entre V et U.
4. Sur le disque, on considère $h_{\mathbb{D}}(z) = 1/(1-|z|^2)$. Montrer que les automorphismes du disque préservent la 2-forme hermitienne associée à $h_{\mathbb{D}}$. En déduire que ce sont des isométries pour la distance induite par $h_{\mathbb{D}}$.
5. Calculer $h_{\mathbb{H}}$ sur $\mathbb{H}$ tel que les biholomorphismes entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$ soient des isométries.
6. Plus généralement, si U est simplement connexe et distinct de $\mathbb{C}$, montrer que U est muni d'une distance du type de la question 1, telle que tous les biholomorphismes de U dans lui-même soient des isométries.
7. * Montrer, dans le cas du disque, qu'un segment entre 0 et $z \in \mathbb{D}$ réalise la distance entre 0 et z. En déduire que cette distance est géodésique (l'inf de la définition est atteint pour toute paire de points). Quelles sont les géodésiques (les courbes qui réalisent la distance) ?
8. Enfin, si U et V sont deux ouverts simplement connexes, énoncer un « lemme de Schwarz » pour les fonctions holomorphes entre U et V en terme de distance.