Analyse Complexe TD 8 (3/04 - 6/04)

Exercice 1 Pour résoudre cet exercice, on applique l'astuce classique associée au th. de Bolzano Weierstrass. Si une suite bornée n'a qu'une valeur d'adhérence, alors elle converge.

On commence par observer qu'une valeur d'adhérence de (f_n) pour la convergence uniforme sur les compacts de U_α doit être la fonction constante L (c'est une fonction holomorphe, qui est constante sur $\mathbb{R}^+$).

Ensuite, on applique le Théorème de Montel. Si (f_n) ne converge pas uniformément sur les compacts vers L, alors il existe une suite extraite telle que $\|f_{n'} - L\| > \epsilon > 0$ pour tout n. Alors on peut extraire une suite qui converge sur les compacts car $f_{n'}$ est bornée, par le th. de Montel. On obtient ainsi une contradiction.

La convergence radiale vers L est obtenue à partir de la convergence uniforme sur les compacts.

Exercice 2

1. Il y a $z \mapsto (z-i)/(iz-1)$ qui envoie le demi plan dans le disque.
   Pour le secteur d'angle, il s'agit de prendre une fonction puissance bien choisie $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ pour envoyer le secteur d'angle sur le demi plan. Cette fonction est bien définie sur le secteur d'angle.
2. Une lunule est un ouvert connexe borné dont le bord est composé de deux arcs de cercles. Ces deux arcs de cercle ont soit 1 soit 2 points d'intersection. On peut en envoyer 1 à l'infini par une inversion. Alors la lunule est envoyé soit sur une bande, soit sur un secteur d'angle, et on est ramené à la question précédente.
3. Il s'agit de donner une détermination de l'argch sur le demi-plan. La première chose à faire est d'identifier la préimage du demi-plan supérieur par le ch. Pour ce faire, on peut prendre la formule d'addition $\cosh x + iy = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$. On trouve que la préimage est la réunion des demi bandes $\{\mathrm{Re} z > 0, 2k\pi < \mathrm{Im} z (2k+1)\pi\}$ et $\{\mathrm{Re} z < 0, (2k+1)\pi < \mathrm{Im} z 2k\pi\}$. On peut même trouver que sur chacune des demi-bandes, le cosinus hyperbolique est injectif. Comme de plus il est propre (sur la bande) (à valeur dans le demi-plan), il est surjectif !
   C'est donc un biholomorphisme sur chaque demi-bande ! Il y a donc un inverse à gauche par demi-bande.
4. ** Un disque privé d'un segment orthogonal au bord.
   On peut utiliser un automorphisme du disque pour remplacer le segment par un rayon du disque. Ensuite, on prend une racine carré, on s'est ramené au cas d'un demi-disque. Avec une inversion, on peut envoyer ceci sur un secteur d'angle, et alors cf. la question 1.

Exercice 3

1. Soit U un ouvert connexe, et γ une courbe simple, C^1 par morceaux dans U, délimitant un domaine $V \subset U$. Soit f est une fonction holomorphe sur U, et $z \notin f(\gamma([0,1]))$, notons $n_V(z)$ le nombre de préimages de z par f dans V, comptées avec multiplicité. La formule
   $$n_V(z) = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(z).$$
   est obtenue par changement de variable à partir de la formule des résidus pour f'/f sur V.
2. Supposons que $U = \mathbb{D}$, que f est propre sur son image ($f(z) \to \partial f(\mathbb{D})$ quand $|z| \to 1$), et continue au bord de $\mathbb{D}$. On note γ une paramétrisation du cercle. La formule précédente est encore valable. En effet, comme f est propre, l'ensemble des préimages de $z \in \mathbb{D}$ est un compact, donc on peut prendre la limite de la formule quand on prend une famille de cercles de rayon $1-\epsilon$.

Exercice 4

1. On pose $h = f/g$. Cette fonction satisfait les hypothèses de la question 2 précédente. De plus, l'image du cercle par h est contenue dans le cercle. En particulier, tous les points du disque ont le même nombre d'antécédents. Comme 0 n'a pas d'antécédents, h ne prend aucune valeur dans $\mathbb{D}$. De plus h est à valeurs dans $\overline{\mathbb{D}}$. Ainsi, h est constant.
   On pourrait aussi utiliser le principe de réflexion de Schwarz pour dire que h se prolonge une fonction entière bornée par $\overline{h}(1/z) = 1/h(\overline{z})$.
2. ** Si f et g ont des zéros, mais sont non-constantes et bornées, on peut factoriser les zéros dans des produits de Blaschke P et Q. On alors $f/g = cP/Q$ où c est une constante de module 1.

Exercice 5

1. La fonction f est bien définie sur $\overline{\mathbb{D}}$ car la fonction sous l'intégrale est bien définie avec la détermination principale du logarithme, et intégrable au bord.
   Ensuite, on peut observer que $f(e^{2i\pi/n}z) = e^{2i\pi/n}f(z)$. L'image du disque par f est donc un ouvert invariant par la rotation d'angle $2\pi/n$.
   Si on essaye de calculer $f(e^{it}) - f(1)$ pour $t \in [0, 2\pi/n]$, on trouve que c'est de la forme $e^{i\theta}F(t)$ où θ est un angle constant, et F est la primitive d'une fonction réelle positive. En particulier, l'image de l'arc de cercle est un segment. D'après la relation de symmétrie sur f, on en déduit que l'image du cercle unité est un polygone régulier à n côtés.
2. Le bord de l'image de f doit être l'image par f du cercle.
3. La continuité de l'application S sur $\mathbb{R}$ est toujours acquise. C'est la continuité en ∞ qui requiert la condition d'angle. Le fait que l'image de $\mathbb{R}$ soit une ligne brisée provient du fait que sur $\mathbb{R}$ la partie imaginaire d'une détermination du logarithme est constante par morceaux.
4. À partir de l'exercice 3, on peut déduire que si U est un ouvert dont le bord est une courbe γ, et si f est continue sur $\overline{U}$, holomorphe dans U, alors l'image de $\overline{U}$ par f est $f(\gamma)$ et l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, Ind_{f(\gamma)}(z) \neq 0\}$. En particulier, si $S(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ est une courbe simple, son complémentaire a deux composantes connexes, dont une seule non-bornée, qui est un polygone.

Exercice 6 On peut toujours supposer que U est connexe. Si certaines composantes connexes du complémentaire sont des points, on peut les rajouter à U, et les oublier momentanément.

Ensuite, si toutes les composantes connexes du complémentaire sont non-bornées, tous les points du complémentaire de U sont d'indice 0 par rapport à toutes les courbes de U. U est donc simplement connexe, et biholomorphe à un disque. Quitte à rajouter les composantes connexes non-bornées, on peut supposer que le complémentaire de U est borné.

Enfin, à l'aide d'une inversion, peut transformer les composantes connexes bornées en des composantes connexes non-bornée !

Exercice 7 Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si h est une fonction C^∞ et strictement positive sur U, et si γ est un chemin C^1 dans U, on pose

$$\mathrm{long}_h(\gamma) = \int_0^1 h(\gamma(t))|\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

1. La première chose à vérifier est que d_h satisfait l'inégalité triangulaire, et est symétrique. C'est donc une pseudo-distance. Il reste à observer que sur les compacts de U elle est équivalente à la distance euclidienne.
2. On trouve que $\mathrm{long}_h(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{g} := \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt$.
3. Il suffit de voir que $\mathrm{long}_h(\gamma) = \mathrm{long}_{\phi^* h}(\phi^{-1}\gamma)$, avec $\phi^* h := h \circ \phi|\phi'|$.
4. Il suffit de vérifier que si ϕ est un automorphisme du disque,
   $$|\phi'(z)| = \frac{1 - |\phi(z)|^2}{1 - |z|^2} \tag{1}$$
   C'est le cas d'égalité du lemme de Schwarz-Pick. Pour la preuve, voir le corrigé du TD 7.
5. On considère $\phi(z) = (z - i)/(z + i)$. Comme ϕ est un biholomorphisme entre $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$, on pose $h_{\mathbb{H}}(z) = |\phi'(z)|/(1 - |\phi(z)|^2)$. Cela donne
   $$h_{\mathbb{H}}(z) = \frac{2}{|z+i|^2} \frac{|z+i|^2}{|z+i|^2 - |z-i|^2} = \frac{2}{4\mathrm{Im}z} = \frac{1}{2\mathrm{Im}z}. \tag{2}$$
6. Il suffit d'utiliser le biholomorphisme de U avec le disque unité donné par le th. de Riemann.
7. * On peut paramétrer une courbe entre 0 et $z \in \mathbb{D}$ comme $r(t)e^{i\theta(t)}$. Alors
   $$\mathrm{long}_{\mathbb{D}}(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{r'^2 + r^2\theta'^2}}{1 - r^2} dt \tag{3}$$
   On trouve que la longueur de la courbe $r(t)$ est plus petite.
   Les géodésiques de la distance que l'on a construite sur le disque sont donc les portions d'arcs de cercles qui sont orthogonaux au bord du disque.

8. Dans la formulation de cet exercice, on a obtenue que si U et V sont simplement connexes, toute application holomorphe de U dans V est contractante pour la distance que nous avons définie.