Analyse Complexe TD 9 (10/04 - 13/04)

Exercice 1 Soit f une fonction holomorphe sur $\{\mathrm{Re} z > 0\}$, à valeur dans le disque unité. On suppose que f s'annule en 1 avec multiplicité m. Montrer que

$$|f(z)| \leq \left|\frac{1-z}{1+z}\right|^m$$

Exercice 2 Le but ici est de déterminer les couronnes qui sont biholomorphes entre elles. On se donne deux couronnes $C_1 = \{r_1 < |z| < R_1\}$ et $C_2 = \{r_2 < |z| < R_2\}$. On suppose que $R_{1,2} < \infty$.

1. si $r_1 R_2 = r_2 R_1$, donner un biholomorphisme entre les deux couronnes.
   Réciproquement, on se donne φ un biholomorphisme entre C_1 et C_2.
2. Montrer que $|\varphi|$ se prolonge au bord de C_1. Comme $1/\varphi$ est aussi un biholomorphisme entre deux couronnes (lesquelles), on peut donc supposer (ce que l'on fait) que $\lim_{|z|\to r_1} |\varphi(z)| = r_2$, et $\lim_{|z|\to R_1} |\varphi(z)| = R_2$, quitte à remplacer φ par $1/\varphi$.
3. Montrer que $r_1 = 0$ si et seulement si $r_2 = 0$.
   Pour utiliser le lemme des 3 cercles d'Hadamard, on pose

$$A(s) = \sup_{|z|=e^s} \log|\varphi(z)| \text{ et } B(l) = \sup_{|\varphi(z)|=e^l} \log|z|.$$

4. Montrer que $A(B(l)) \geq l$.
5. * Comme φ est une bijection montrer que A est croissante (considérer l'image de cercles de différents rayons, et utilisez des homotopies).
6. En déduire que $A \circ B = l$, et que A, B sont affines.
7. * À partir des questions précédentes, montrer que $|\varphi(z)|$ ne dépend que de $|z|$. Montrer aussi que pour un certain λ, $|z|^\lambda |\varphi(z)|$ est constante. Conclure que $\lambda = \pm 1$.

Exercice 3 *Fonction de Joukowski* Montrer que la fonction $\phi : z \mapsto (z + 1/z)/2$ est un biholomorphisme sur son image sur $\{1 < |z|\}$. Dessiner l'image.

Exercice 4 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 et soit $f : \Omega \to \Omega$ holomorphe vérifiant $f(0) = 0$. On pose $\lambda = f'(0)$, et on suppose qu'on a $0 < |\lambda| < 1$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la n-ième itérée de la fonction f, et on pose $\varphi_n = \lambda^{-n} f_n$.
   a) Montrer qu'on peut trouver des constantes $\delta > 0$ et $\alpha < |\lambda|^{1/2}$ telles que $|f_n(z)| \leq \alpha^n |z|$ pour tout $z \in \overline{D}(0, \delta)$ et pour tout n.
   b) Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$|\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| \leq \frac{C}{|\lambda|^{n+1}} |f_n(z)|^2$$

   pour $|z| \leq \delta$ et pour tout n.
   c) Déduire de a) et b) que la suite (φ_n) converge uniformément sur $\overline{D}(0, \delta)$.
2. Montrer que f est biholomorphiquement conjuguée à l'homothétie $z \mapsto \lambda z$ au voisinage de 0. En d'autres termes, montrer qu'il existe U, V voisinages de 0 dans $\mathbb{C}$ et un biholomorphisme $\varphi : U \to V$ tels que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) \equiv \lambda z$.

Exercice 5

1. Soit f et F deux fonctions holomorphes sur le disque $\mathbb{D}$ qui s'annulent en zéro, telles que $f(\mathbb{D}) \subset F(\mathbb{D})$ et F est injective sur le disque. Montrer que $\sup_{|z|\leq r} |f(z)| \leq \sup_{|z|\leq r} |F(z)|$ pour $r \in [0, 1]$.
2. Notons maintenant $f = \sum c_n z^n$. Montrer que

$$|c_n| \leq \frac{e}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r_n e^{i\theta})| d\theta$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où $r_n = 1 - 1/n$.
3. Supposons maintenant que f évite $[1, +\infty[$. Montrer que $|c_n| \leq Cn$ où C est une constante absolue.